

Deltentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, MEI1 och MI1 den 2008-01-14.

Tid: kl 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga!

Examinator: Håkan Blomqvist (För godkänt krävs minst 10p.)

TEORI OCH BASKUNSKAPER

1. Definiera följande begrepp:

- a) invers matris b) trappstegsmatris c) reducerad matris d) skalär produkt
e) vektoriell produkt (1p+0,5p+1,5p+1p+1,5p)

2. Antag att $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ är en ONH-bas.

- a) Beräkna $\mathbf{e}_x \bullet \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y \bullet \mathbf{e}_z$ och $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z$ med hjälp av definitionerna för skalär respektive vektoriell produkt. (2p)

- b) Visa att $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ och beräkna $|\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y|$ med hjälp av denna formel. (1,5p)

- c) Förenkla $(\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y) \times (3\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y)$ med hjälp distributiva lagen och de övriga räknelagarna för **vektoriell** produkt. (Svaret skall endast innehålla **en** basvektor.) (1,5p)

3. Bevisa att

- a) om en matris är inverterbar så är inversen entydig. (2p)

- b) avståndet d från punkten $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$ till planet Π med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$, ges av formeln

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4p)$$

4. Matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ är givna.

- a) Beräkna $\det(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}^T)$. (1p)

- b) Visa att formeln $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ **inte** gäller allmänt genom att tillämpa den på matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$. (1p)

OBS! Uppgift 5 finns på nästa sida.

5. Punkterna $A = (1; 2; 3)$, $B = (2; 4; 5)$ och $C = (4; 3; 1)$ är givna i ett ONH-system.

a) Bestäm, på **parameterform**, ekvationen för den rätta linje som går genom punkterna A och B. (1,5p)

b) Bestäm, på **parameterfri form**, ekvationen för den rätta linje som går genom punkterna A och B. (0,5p)

c) Beräkna $\overrightarrow{AC} \bullet \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ (0,5p)

d) Beräkna $\overrightarrow{AC} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. (2p)

e) Punkten D ligger på sträckan AB, belägen så att $DB = \frac{1}{3} AB$.
Beräkna vektorn $\overrightarrow{DC}$. (2p)

SVAR:

1. Teori

2.a) Teori b) $|e_x - e_y| = \sqrt{2}$ c) $(e_x + 2e_y) \times (3e_x + 4e_y) = -2e_z$

3. Teori

4.a) $\det(A + 2B^T) = -7$ b) $(A + B)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = A^{-1} + B^{-1}$

5.a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ b) $x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$ e) $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -10 \end{bmatrix}$