

Problemtentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, MEI1 och MI1 den 2008-10-24.

Tid: kl 14.00 - 18.00 Hjälpmedel: Chalmersgodkänd (typgodkänd) räknedosa.

1.a) Bestäm det reella talet r så att $\operatorname{Re}\left(\frac{5+jr}{1+j3}\right) = 0$. (1p)

b) Skriv det komplexa talet $-\sqrt{3} - j$ på polär form. (1,5p)

c) Förenkla $z = \frac{(-\sqrt{3} - j)^{200}}{(1 - j)^{402}}$ (2,5p)

(Svaret skall ges på formen $z = x + jy$, där x och y är reella tal som inte innehåller trigonometriska funktioner.)

d) Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $2z^3 - 5z^2 + az + b = 0$ har roten $1 + j3$ och lös ekvationen. (3p)

2. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + ay - 4z = 2 \\ x + y - az = 1 \\ 3x + 5y + z = 6 \end{cases}$$

och låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a & -4 \\ 1 & 1 & -a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, dvs $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen till ES.

a) Visa att $\det \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow (a = 1) \vee (a = 2)$. (1p)

b) Beräkna y för $a = 0$. Använd Cramers regel. (1p)

c) Undersök med hjälp av **inversens definition** för vilket värde på a som matrisen

$\mathbf{X} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 20 & -4 \\ 1 & -14 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$ är en invers till $\mathbf{A}$. (1p)

d) Lös ES för alla värden på parametern a för vilka detta är möjligt. Använd eliminationsmetoden på matrisform. (4p)

e) För $a = 1$ har ES, som framgår av 2d, ingen exakt lösning. Bestäm för $a = 1$ den bästa möjliga lösningen i minsta kvadrarmetodens mening. Medelfelet behöver inte beräknas. (3p)

OBS! Uppgift 3 finns på nästa sida.

3. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 1)$ och $C = (a; 2; 3)$ givna.

a) Beräkna vinkeln mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ för $a = 0$. (1p)

b) För vilket/vilka värden på konstanten a blir vinkeln 60° mellan $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$? (2,5p)

c) Visa att $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-a \end{bmatrix}$ (1p)

d) Låt Π vara det plan som går genom punkterna A, B och C.

För vilket/vilka värden på konstanten a ligger punkten $D = (1; 2; 5)$ i planet Π ? (2p)

e) För vilka värden på a bildar $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ett högersystem? (0,5p)

f) Låt L_1 vara den linje som går genom punkterna A och B.

För vilka värden på konstanten a blir avståndet 6 le mellan L_1 och punkten C? (2p)

Svar till problemtentamen i Algebra för DAI1 m fl den 2008-10-24.

1.a) $r = -\frac{5}{3}$ b) $-\sqrt{3} - j = 2e^{j\frac{7\pi}{6}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4}$ d) $(z_{1,2} = 1 \pm j3) \wedge (z_3 = \frac{1}{2})$, $a = 22$, $b = -10$

2.a) $\det \mathbf{A} = a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow (a = 2) \vee (a = 1)$ b) $y = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-12}{-6} = 2$ c) $a = 0$

d) Fall 1: $a \neq 1, a \neq 2$

Fall 2: $a = 1$

Fall 3: $a = 2$

Precis en lösning.

ES saknar lösning!

∞ - många lösningar.

$$\begin{cases} x = \frac{2a+1}{a-1} \\ y = -\frac{2}{a-1} \\ z = \frac{1}{a-1} \end{cases}$$

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 11t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2t \end{cases}$$

e) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3s \\ y = \frac{8}{9} - 2s \\ z = s \end{cases}$

3.a) $\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{6}$ b) $a = 1$ d) $a = 2$ e) $a < 2$ f) $(a = 11) \vee (a = -5)$