

Teori- och baskunskapstentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, MEI1 och MI1

Datum: 2009-01-14

Tid: kl 8.30 - 12.30 Hjälpmedel: Inga!

Examinator: Håkan Blomqvist (För godkänt krävs minst 10p.)

1. Definiera följande begrepp:

a) invers matris b) rang c) högersystem d) vektoriell produkt (1p+1p+1p+1,5p)

2.a) Bevisa att om $\mathbf{A}$ är inverterbar, gäller att $\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. (1p)

b) Formulera och bevisa projektionssatsen. (3p)

c) Bevisa att avståndet d från punkten $P_1 = (x_1; y_1; z_1)$ till planet Π med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$, ges av formeln

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4p)$$

3. Matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ är givna.

a) Beräkna $\det(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{B}^T)$. (2p)

b) Visa att formeln $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ inte gäller allmänt genom att tillämpa den på matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$. Hur lyder den korrekta formeln? (1,5p)

4. Utveckla och förenkla nedanstående uttryck i **a och **b** med hjälp av räknelagarna för skalär respektive vektoriell produkt.**

a) $(2\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (5\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$ (1p)

b) $(2\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (5\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$ (1,5p)

c) Beräkna värdet av uttrycket i **a i det fall då för vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller att längden av $\mathbf{u}$ är 1, att längden av $\mathbf{v}$ är 2 och att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är 90° .** (1p)

OBS! Uppgift 5 finns på nästa sida.

5. Punkterna $A = (1; 2; 3)$, $B = (2; 4; 5)$ och $C = (4; 6; 1)$ är givna i ett ONH-system.

a) Bestäm, på **parameterfri form**, ekvationen för den rätta linje som går genom punkterna A och B. (1,5p)

b) Beräkna $\overrightarrow{AC} \bullet \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ (0,5p)

c) Beräkna $\overrightarrow{AC} \times \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. (1,5p)

d) Punkten D är så belägen att ABDC bildar en parallelogram med diagonalerna AD och BC.

Beräkna längden av diagonalen AD. (2p)

SVAR:

1. Teori

2. Teori

3.a) $\det(\mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{B}^T) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = -31$

b) $(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & 13 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T; (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

4.a) $10|u|^2 + u \bullet v - 5|v|^2$ **b)** $11u \times v$ **c)** -2

5.a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$ **b)** $\frac{7}{2}$ **c)** $\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **d)** $2\sqrt{13} \text{ le}$