

Problemtentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, EPI, MEI1 och MI1 2009-10-23.

Tid: kl 14.00 - 18.00 **Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd (typgodkänd) räknedosa.

Examinator: Håkan Blomqvist

Ansvarig lärare: Håkan Blomqvist, tel. 772 5881

Lösningarna skall vara fullständigt redovisade och svaren fullständigt förenklade!

PROBLEM

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$ approximativt med minsta kvadratmetoden.

(Medelfelet behöver ej beräknas.) (2p)

2. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$. (1p)

b) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} + \mathbf{X} = \mathbf{B}^T$. (1p)

3. Låt $z = \frac{(-1 + j\sqrt{3})^{107}}{(j4)^{53}}$.

a) Beräkna $|z|$ och $\arg z$. (3p)

b) Skriv z på rektangulär form $x + jy$. (1p)

4. Ekvationen $2z^4 - 6z^3 - z^2 - 25 = 0$ har en icke-reell rot av typen $a + j3a$,
dvs en rot vars imaginärdel är tre gånger så stor som realdelen. Lös ekvationen. (5p)

5. Lös, för alla värden på parametern p för vilka lösningar existerar, ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ (p+1)x_1 + (p+2)x_2 + (2p+3)x_3 = p+4 \\ (p^2 - p + 1)x_1 + (p^2 - p + 2)x_2 + (p^2 - p + 3)x_3 = 4 \end{cases}$$

Använd eliminationsmetoden på matrisform. (5p)

6. I ett ONH-system är Π planet $2x + 2y - z + 18 = 0$ och

L är den rätta linje som går genom punkterna $Q = (0; 1; 2)$ och $R = (4; 5; 9)$.

a) Beräkna vinkeln mellan planet Π och den rätta linjen L. (2p)

b) Beräkna avståndet från planet Π till punkten Q genom att använda avståndsformeln för planet. (1p)

c) Beräkna avståndet från planet Π till punkten Q genom att först beräkna koordinaterna för projektionen Q_{proj} av punkten Q på planet Π och sedan beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{QQ_{\text{proj}}}$. (3p)

d) Beräkna koordinaterna för spegelbilden Q_{spegel} av punkten Q i planet Π . (1p)

e) Låt S vara skärningspunkten för linjen L och planet Π . Beräkna arean av triangeln QSQ_{spegel} . (2p)

SVAR:

$$1. \begin{cases} x = \frac{9}{5} - 2t \\ y = t \end{cases}$$

$$2.a) (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \mathbf{X} = \mathbf{B}^T (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3.a) |z| = 2, \arg z = \frac{5\pi}{6} \quad b) z = -\sqrt{3} + j$$

$$4. z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{3}{2}; z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6} \quad 5.$$

5. Fall 1: $(p \neq 0) \wedge (p \neq 1)$ ES saknar lösning!

$$\text{Fall 2: } p = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 4 + t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{Fall 3: } p = 1 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

$$6.a) \varphi = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,5^\circ \quad b), c) 6 \ell e \quad d) Q_{\text{spegel}} = (-8; -7; 6) \quad e) T_{QSQ_{\text{spegel}}} = 72\sqrt{2} \text{ ae}$$