

Problemtentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, EPI, MEI1 och MI1 2010-01-13.

Tid: kl 14.00 - 18.00 **Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd (typgodkänd) räknedosa.

Examinator: Håkan Blomqvist

Ansvarig lärare: Håkan Blomqvist, tel. 772 5881

1. Beräkna $\operatorname{Im} z$, $|z|$ och $\arg z$ för det komplexa talet $z = \frac{1+j}{2+j} + \frac{1}{j}$. (2p)

2. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + y + kz = k^2 + 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

a) Beräkna $\det \mathbf{A}$, för $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dvs $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen till ES,
och avgör, med hjälp av resultatet, för vilka värden på k som $\mathbf{A}$ är inverterbar. (1p)

b) Beräkna x med Cramers regel, för de k -värden för vilka detta är möjligt. (1p)

c) Bestäm rangen av $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k & k^2 + 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dvs $\mathbf{M}$ är totalmatrisen för ES. (2p)

d) Lös ES för $k = -1$. (1p)

3. Anpassa med minsta kvadratmetoden en kurva av typen $y = a\sqrt{x} + b$ till punkterna (1; 1), (4; 3), och (16; 14). Beräkna även medelfelet. (4p)

4. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 1; 1)$, $B = (3; 3; 2)$, $C = (3; 4; 5)$
och linjen $L: x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ givna.

a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2,5p)

b) Bestäm avståndet från punkten B till linjen L. (2,5p)

c) Punkten E ligger på linjen L. Bestäm koordinaterna för E så att
alla koordinater för E blir positiva och att
vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AE}$ blir $\arccos \frac{4}{5}$. (4p)

OBS! Uppgift 5 finns på nästa sida.

5.a) Visa att $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ och att $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ genom att tillämpa

Moivres formel $(e^{jv})^n = e^{jnv}$ för $n = 2$ och $v = \frac{\pi}{8}$. (2p)

b) Lös ekvationen $z^4 - 2\sqrt{2}z^2 + 4 = 0$. (5p)

(Svaret i **5b** skall ges på formen $x + jy$ och får inte innehålla trigonometriska uttryck. Resultatet i **5a** får användas även om **5a** ej är löst.)

SVAR:

1. $\operatorname{Im} z = -\frac{4}{5}$, $|z| = 1$, $\arg z = a - \arctan \frac{4}{3} \approx -53^\circ$

2.a) $\det \mathbf{A} = 5(k+1)$; $\mathbf{A}^{-1}$ existerar $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow 5(k+1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1$

b) $x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{5k(k+1)}{5(k+1)} = k$ för $k \neq -1$.

c) Fall 1: $k \neq -1$. $\operatorname{rang} \mathbf{M} = 3$. **Fall 2:** $k = -1$. $\operatorname{rang} \mathbf{M} = 2$.

d) $k = -1$ ger att $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$

3. $y = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{2}$ och $\eta = \sqrt{\frac{7}{6}} \approx 1,08$

4.a) $5x - 6y + 2z - 1 = 0$ **b)** $d(B, L) = \sqrt{\frac{31}{3}}$ le **c)** $E = (\frac{23}{3} + 4\sqrt{5}; \frac{29}{3} + 4\sqrt{5}; \frac{55}{3} + 8\sqrt{5})$

5.a) – b) $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \pm j\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right)$