Lösningar till problemtentamen i Algebra för DAI1 m fl 2011-01-13.

1. Lös ekvationerna

a) $e^{j\frac{\pi}{4}}z = e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{3\pi}{4}}z$ **b)** $z^2 + (2 - j6)z - 16 - j12 = 0$. (3p+5p)

(Svaret i **1a** skall ges på formen $x + jy$ och får inte innehålla trigonometriska uttryck.)

Lösning:

1.a) $e^{j\frac{\pi}{4}}z = e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{3\pi}{4}}z \Leftrightarrow \left(e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)z = e^{j\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{j\frac{3\pi}{4}}}$

$$z = \frac{\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}{j\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{j4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

1.b) Kvadratkomplettering av *VL* ger

$z^2 + (2 - j6)z - 16 - j12 = (z + 1 - j3)^2 - (1 - j3)^2 - 16 - j12$ varav

$z^2 + (2 - j6)z - 16 - j12 = 0 \Leftrightarrow (z + 1 - j3)^2 = (1 - j3)^2 + 16 + j12$

Sätt: $z + 1 - j3 = u + jv$. Utveckling av de båda leden i ekvationen ger

$VL = (z + 1 - j3)^2 = (u + jv)^2 = u^2 + j2uv + j^2v^2 = u^2 - v^2 + j2uv$

$HL = (1 - j3)^2 + 16 + j12 = 1 - j6 + j^2 9 + 16 + j12 = 8 + j6$

$$VL = HL \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 8 \\ 2uv = 6 \Rightarrow v = \frac{3}{u} \end{cases}$$

Insättning av $v = \frac{3}{u}$ i $u^2 - v^2 = 8$ ger

$u^2 - (\frac{3}{u})^2 = 8 \Leftrightarrow u^4 - \frac{9}{u^2} = 8$ Multiplikation av båda leden med u^2 ger

$u^4 - 9 = 8u^2 \Leftrightarrow u^4 - 8u^2 - 9 = 0$ .Sätter vi $t = u^2$ får vi andragradsekvationen

$t^2 - 8t - 9 = 0$ som har rötterna $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9} = 4 \pm 5$

Fall 1. $u^2 = t_1 = 9 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 3$ varav $v_1 = \frac{3}{u_1} = 1$; $v_2 = \frac{3}{u_2} = -1$

Fall 2. $u^2 = t_2 = -1 < 0$ vilket är orimligt, ty *u* är reellt.

$z+1-j3=u+jv \Leftrightarrow z=u+jv-1+j3=u-1+j(v+3)$ ger slutligen att

SVAR: $\begin{cases} z_1=u_1-1+j(v_1+3)=3-1+j(1+3)=2+j4 \\ z_2=u_2-1+j(v_2+3)=-3-1+j(-1+3)=-4+j2 \end{cases}$

Anm. Då vi löste ut *u* enligt $2uv=6 \Rightarrow v=\frac{3}{u}$ har vi antagit att $u \neq 0$.
Att *u* inte kan vara 0 beror på att vi, i likheten $2uv=6$ för $u=0$, skulle få att $VL=2uv=2\cdot 0\cdot v=0$ och att $HL=6\neq 0$ vilket är orimligt.

2. Låt ES vara ekvationssystemet $\begin{cases} 2x & + & 2y & - & pz & = & q \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ px & + & (p+1)y & + & (1-p)z & = & p \end{cases}$.

a) Lös, med Cramers regel, ekvationssystemet ES för alla värden på parametern *p* för vilka lösningar existerar. (3p)

b) Skriv ekvationssystemet ES som en matrisekvation och lös matrisekvationen med hjälp av inversen för koefficientmatrisen. (3p)

c) Lös ES för $p=2$. Använd eliminationsmetoden på matrisform. (3p)

Lösning:

2.a) $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -p \\ 1 & 1 & -1 \\ p & p+1 & 1-p \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p+1 & 1-p \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{vmatrix}+(-p)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p+1 \end{vmatrix}=$

$$=2(1-p+p+1)-2(1-p+p)-p(p+1-p)=4-2-p=2-p$$

Lösning med hjälp av Cramers regel existerar $\Leftrightarrow \det\mathbf{A}\neq 0 \Leftrightarrow 2-p\neq 0 \Leftrightarrow p\neq 2$

$$\det\mathbf{A}_1=\begin{vmatrix} q & 2 & -p \\ 1 & 1 & -1 \\ p & p+1 & 1-p \end{vmatrix}=q\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p+1 & 1-p \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{vmatrix}+(-p)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p+1 \end{vmatrix}=$$

$$=q(1-p+p+1)-2(1-p+p)-p(p+1-p)=2q-2-p$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & q & -p \\ 1 & 1 & -1 \\ p & p & 1-p \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{vmatrix} + (-p)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p \end{vmatrix} = 2-q$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & q \\ 1 & 1 & 1 \\ p & p+1 & p \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p+1 & p \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & p+1 \end{vmatrix} = -2+q$$

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{2q-p-2}{2-p} = \frac{p-2q+2}{p-2}, \quad y = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{2-q}{2-p} = \frac{q-2}{p-2}$$

$$z = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{q-2}{2-p} = -\frac{q-2}{p-2}$$

2.b) ES $\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -p \\ 1 & 1 & -1 \\ p & p+1 & 1-p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ 1 \\ p \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Ex} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

För $p \neq 2$ erhålls att

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -p & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ p & p+1 & 1-p & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -p & 1 & 0 & 0 \\ p & p+1 & 1-p & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{-2}\ \boxed{-p} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-p & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -p & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -p & 1 \\ 0 & 0 & 2-p & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1+p & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -p & 1 \\ 0 & 0 & 2-p & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} p \neq 2 \\ \\ \boxed{\tfrac{1}{2-p}} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1+p & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -p & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2-p} & -\frac{2}{2-p} & 0 \end{array}\right] \boxed{-1}\ \boxed{2} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{2-p} & 1+p-\frac{4}{2-p} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2-p} & -p+\frac{2}{2-p} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2-p} & -\frac{2}{2-p} & 0 \end{array}\right] = [\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}] \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{2-p}\begin{bmatrix} 2 & -p^2+p-2 & p-2 \\ -1 & p^2-2p+2 & 2-p \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \tfrac{1}{2-p}\begin{bmatrix} 2 & -p^2+p-2 & p-2 \\ -1 & p^2-2p+2 & 2-p \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ 1 \\ p \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2-p}\begin{bmatrix} 2q-p-2 \\ 2-q \\ q-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2q-p-2}{2-p} \\ \frac{2-q}{2-p} \\ \frac{q-2}{2-p} \end{bmatrix}$$

2.c) För $p = 2$ erhålls att

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & q \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & q \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \boxed{-2}\ \boxed{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} q \neq 2 \\ \\ \boxed{\tfrac{1}{q-2}} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 1: $p = 2, q \neq 2$
ES saknar lösning!
Pivotelementet i rad 3
står sist i raden.

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 2: $p = 2, q = 2$
z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

3. Anpassa med minsta kvadratmetoden kurvan $y = ax^2 + bx + c$ till punkterna (−1; 1), (0; 0), (1; −1) och (2; 0). Medelfelet behöver ej beräknas. (4p)

Lösning:

Insättning av punkterna i kurvans ekvation ger matrisekv: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls av (**ESU**) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{ESU})\ \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 45 - 20 - 15 = 10$$

$$\det \mathbf{C}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\,, \det \mathbf{C}_2 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot (-1)\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

$$\det \mathbf{C}_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-1)\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

SVAR: $y = ax^2 + bx + c = \frac{5}{10}x^2 - \frac{9}{10}x - \frac{3}{10}$

4. Låt L_1 vara linjen $\dfrac{x-1}{2} = y-1 = \dfrac{z-3}{2}$ och låt L_2 vara den linje som går genom punkterna A = (10; 6; 9) och B = (2; 2; 1).

a) Visa att L_1 är parallell med L_2. (1p)

b) Beräkna avståndet mellan L_1 och L_2. (3p)

c) Bestäm ekvationen för det plan Π som innehåller L_1 och L_2. (2p)

Lösning:

a) $\mathrm{L}_1: \dfrac{x-1}{2} = y-1 = \dfrac{z-3}{2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t\cdot 2 \\ y = 1 + t\cdot 1 \\ z = 3 + t\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\text{o} + t\,\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10\\6\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8\\-4\\-8\end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = -4\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{v} \,//\, \boldsymbol{v}_2 \Rightarrow \mathrm{L}_1 \,//\, \mathrm{L}_2$$

b) $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_\text{o} = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, och det följer att

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_\text{o}) = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\6\\1\end{bmatrix}$$

Avståndsformeln för räta linjen ger slutligen att

SVAR: $d(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2) = d(\mathrm{L}_1, \mathrm{B}) = \dfrac{|\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_\text{o})|}{|\boldsymbol{v}|} = \dfrac{\sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$ le

c) Tag t ex $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_\text{o})$

$$\Pi : \boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\text{o}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4\\6\\1\end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4\\6\\1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}x-1\\y-1\\z-3\end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 6y + z - 5 = 0$$

SVAR: $\Pi : 4x - 6y - z + 5 = 0$