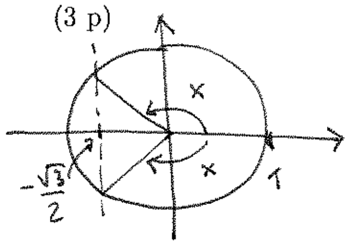
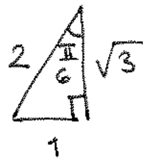
Anonym kod	LMA019 Algebra 2017-10-26	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna alla lösningar till ekvationen $2\cos x + \sqrt{3} = 0$. (3 p)





Lösning: $2\cos(x)+\sqrt{3}=0 \iff \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Av figuren framgår att:

$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi \cdot n \ , \ n \in \mathbb{Z}$

Svar: $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$

(b) Bestäm alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + a^2 y = a \end{cases}$$

saknar lösning.

Lösning: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a^2 & a \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right) \leftarrow (a^2-4)y = a-2 \iff$

$\iff (a-2)(a+2)y = a-2 \leftarrow$ Saknas lösning om $a=-2$

Svar: $a = -2$

(c) Beräkna inversen till (3 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: $(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 2 \ -3 \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

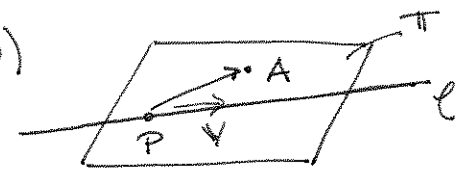
Test: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $\overset{A}{(1,1,-2)}$ och innehåller den räta linjen (3 p)

$$\frac{x+1}{2} = y - 1 = z$$

Lösning: Har att $\mathbf{v} = (2,1,1)$, $P = (-1,1,0)$



Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{PA} = A - P = (2,0,-2)$ så

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi: -2x + 6y - 2z = D$$

$$P \in \pi \Rightarrow D = 2 + 6 - 0 = 8 \Rightarrow \pi: -2x + 6y - 2z = 8$$

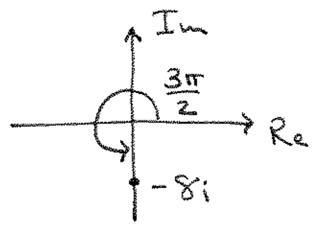
$$\Leftrightarrow \pi: x - 3y + z = -4$$

Svar: $\pi: x - 3y + z = -4$

(e) Lös ekvationen $z^3 + 8i = 0$ och rita ut rötterna i det komplexa talplanet. (3 p)

Lösning:

$$z^3 = -8i = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) =$$



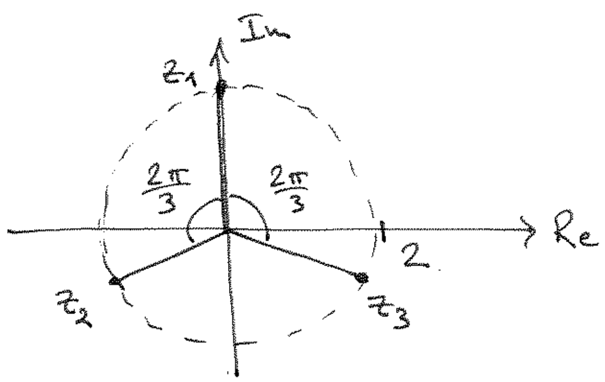
$$= 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = 8^{1/3} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right)} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\underline{n=0}$: $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

$\underline{n=1}$: $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$\underline{n=2}$: $z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$



2 (a) Definition: En mängd vektorer $\{\mathbb{v}_1, \dots, \mathbb{v}_m\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara linjärt oberoende om vektorekvationen

$$x_1\mathbb{v}_1 + x_2\mathbb{v}_2 + \dots + x_m\mathbb{v}_m = \mathbb{0}$$

endast har den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

(b) Vill bestämma $a \in \mathbb{R}$ så att

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}4\\a\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (*)$$

endast har lösn. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

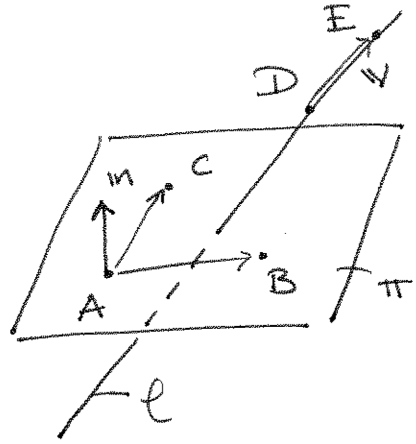
$$(*) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&0\\0&3&a&0\\2&1&5&0\end{array}\right) \overset{-2}{} \sim \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&3&a&0\\0&-3&-3&0\end{pmatrix} \overset{1}{} \sim \begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&3&a&0\\0&0&a-3&0\end{pmatrix}$$

$(a-3)x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$ om $a \neq 3$

$x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$\therefore \{\mathbb{v}_1, \mathbb{v}_2, \mathbb{v}_3\}$ linjärt oberoende om $a \neq 3$

3. Vi börjar med att beräkna π och ℓ



$$\vec{AB} = B - A = (0, 3, -3)$$
$$\vec{AC} = C - A = (3, -2, 3)$$

$$\mathbf{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi : 3x - 9y - 9z = D$$

$$A \in \pi \rightarrow D = 0 - 9\cdot(-1) - 0 = 9$$

$$\therefore \pi : 3x - 9y - 9z = 9 \iff x - 3y - 3z = 3$$

$$\mathbf{v} = E - D = (-1, 4, 3)$$

$$\Rightarrow \ell : \mathbf{x} = D + t\mathbf{v} = (0, 1, 1) + t(-1, 4, 3) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \ell : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

← Stoppa in dessa i π:s ekvation

$$-t - 3(1 + 4t) - 3(1 + 3t) = 3 \iff$$

$$\iff -t - 3 - 12t - 3 - 9t = 3 \iff -22t = 9 \iff t = -\frac{9}{22}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\left(-\frac{9}{22}\right) = 9/22 \\ y = 1 + 4\left(-\frac{9}{22}\right) = -7/11 \\ z = 1 + 3\left(-\frac{9}{22}\right) = -5/22 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Skärningspkt} : \left(\frac{9}{22}, -\frac{7}{11}, -\frac{5}{22}\right) = \frac{1}{22}(9, -14, -5)$$

4 (a) $\begin{cases} k+m=4 \\ 2k+m=6 \\ 3k+m=14 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}}$

Vi undersöker om det finns en exakt lösning:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \; -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow 0=6 \;\lightning$$

$\therefore$ Lösning saknas

(b) $A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

$A^T\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+12+42 \\ 4+6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 24 \end{pmatrix}$

$$A^TA\mathbb{x} = A^T\mathbb{b} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 14 & 6 & 58 \\ 6 & 3 & 24 \end{array}\right) \cdot \tfrac{1}{3} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 14 & 6 & 58 \end{pmatrix} -7 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} 1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\therefore \; y = 5x - 2$

5. $AXB = C - 2XB \iff AXB + 2XB = C \iff$

$\iff (A+2I)XB = C \iff X = (A+2I)^{-1}CB^{-1}$

$$A+2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+2I \,\vdots\, I) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-2)\ (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +5 & +2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (-5)\ (-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (A+2I)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Test:</u> $(A+2I)^{-1}(A+2I) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ok!

$$B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ekvationssystemet är ekvivalent med:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

Vi behöver $\det(A)$ och $\det(A_1(\mathbb{b}))$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{+}1 & 3 & 4 \\ {}^{-}0 & 1 & 1 \\ {}^{+}1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(7-4) - 0 + 1\cdot(3-4) = 3 - 1 = 2$$

$$\det(A_1(\mathbb{b})) = \begin{vmatrix} \overset{+}{5} & \overset{-}{3} & \overset{+}{4} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 5(7-4) - 3(7-1) + 4(4-1) =$$

$$= 15 - 18 + 12 = 9$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbb{b}))}{\det(A)} = \frac{9}{2}$$

7 (a) $A\mathbf{x} = \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbb{0} \Leftrightarrow (A - I)\mathbf{x} = \mathbb{0}$

$\Rightarrow (A - I \,\vdots\, \mathbb{0}) \leftarrow$ Kommer alltid att vara lösbart!

$\therefore$ Sant

(b) Kolumnerna i A linj. ober. $\Leftrightarrow$ A inverterbar

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A^T) = \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A^T inverterbar $\Leftrightarrow$ Kolumnerna i A^T linj. ober.

$\Leftrightarrow$ Raderna i A^T linj. ober.

$\therefore$ Sant

(c) <u>Motex.</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Då $A \neq 0$, $AB = 0 = AC$, men $B \neq C$

$\therefore$ Falskt

(d) $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3)$ har en pivot-position i varje rad $\Leftrightarrow$ $\{A$ 3×3-matris$\}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A har en pivot-position i varje kolumn $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende

$\therefore$ Sant

(e) $A(0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2) = 0.2A\mathbf{x}_1 + 0.8A\mathbf{x}_2 = 0.2\mathbf{b} + 0.8\mathbf{b} = \mathbf{b}$

$\therefore$ Sant

8. Ekvationssystemet är ekvivalent med

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -4a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -4a \end{vmatrix} \; -2 \; = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 3-2a & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -4a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3-2a & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & -4a \end{vmatrix} =$$

$$= (3-2a)(8-4a) - 0 + 1(1-5) =$$

$$= 24 - 12a - 16a + 8a^2 - 4 = 8a^2 - 28a + 20$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a^2 - \frac{7}{2}a + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}\cdot\frac{8}{8}} = \frac{7}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2}, \; a_2 = 1$$

$\therefore$ Unik lösning för alla $b \in \mathbb{R}$ och $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{5}{2}\}$

<u>$a=1$:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & 1 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 6-2b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & 1 \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 6-2b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & 2b-5 \end{array}\right) 9 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 6-2b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b+31 \end{array}\right)$$

<u>$a=5/2$:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5/2 & 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -10 & 1 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5/2 & 0 & 1 & b \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 6-2b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -10 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -8 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & 6-2b \end{pmatrix} 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -8 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -15 & -15 & 8-2b \end{pmatrix} 15 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -8 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 68-2b \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Oändligt många lösningar då $a = 1$, $b = -31/2$ eller $a = 5/2$, $b = 34$

Saknas lösning då $a = 1$, $b \neq -31/2$ eller $a = 5/2$, $b \neq 34$

9. Vet att om $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ linjär avbildning och D begränsat område i $\mathbb{R}^3$, så gäller att:

$$\text{Volym}(T(D)) = |\det(A)| \cdot \text{Volym}(D)$$

Låt O beteckna origo i $\mathbb{R}^3$

I vårt fall: $D = P$ = den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA} = A$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB} = B$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{OC} = C$

Vet även att: $\text{Volym}(P) = |\det(\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w})|$

$\therefore \text{Volym}(T(P)) = |\det(A)|\,|\det(\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w})|$

$$\det(\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & 12 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \quad 5 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 13 \\ 0 & 32 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\left(6 \cdot 17 - 13 \cdot 32\right) = (-1) \cdot (102 - 416) = 314$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -1 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$\therefore \text{Volym}(T(P)) = |4| \cdot |314| = 4 \cdot 314 = 1256$ v.e.

10. (a) Påstående: $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ för alla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$

Bevis: $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$VL = |\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

$$HL = \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$$

∎

(b) Påstående: $A^T A \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Bevis: $|A\mathbf{u}|^2 \overset{(a)}{=} (A\mathbf{u})^T A\mathbf{u} = \mathbf{u}^T \underbrace{A^T A \mathbf{u}}_{\mathbf{0}} = 0$

$|A\mathbf{u}|^2 = 0 \Rightarrow \{\text{vektor av längd } 0\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$

∎