

LMA019 Algebra

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentamen krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2017 räknas med. För betyg 4 och 5 krävs dessutom 33 respektive 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 respektive 6 poäng från den andra delen (överbetygsdelen).

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift omfattar 14 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng.** Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Definiera vad det innebär att en mängd vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. (2 p)
(b) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så de tre vektorerna $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 1)$ och $\mathbf{v}_3 = (4, a, 5)$ blir linjärt oberoende. (2 p)
3. Låt π vara planet som innehåller de tre punkterna $A = (0, -1, 0)$, $B = (0, 2, -3)$ och $C = (3, -3, 3)$. Låt l vara den räta linjen genom de två punkter $D = (0, 1, 1)$ och $E = (-1, 5, 4)$. Bestäm skärningspunkten mellan π och l . (4 p)
4. Låt $(1, 4)$, $(2, 6)$ och $(3, 14)$ vara tre punkter i planet.
(a) Visa att det inte går att hitta en rät linje som går genom alla tre punkterna. (2 p)
(Obs! Grafiska lösningar godtas ej!)
- (b) Bestäm med hjälp av minsta kvadratmetoden den bästa approximativa anpassningen av en rät linje till de tre punkterna. (2 p)
5. Lös matrisekvationen $AXB = C - 2XB$, där (4 p)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Betrakta ekvationssystemet (3 p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Beräkna x_1 med hjälp av Cramers regel.

Var god vänd!

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Någon motivering skall inte ges. 1 poäng för varje korrekt svar, -1 poäng för varje felaktigt svar. Dock inte mindre än 0 poäng totalt.
- (a) Matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ är alltid lösbar.
 - (b) Om kolumnerna i en $n \times n$ -matris är linjärt oberoende, så måste raderna också vara det.
 - (c) För alla $n \times n$ -matriser A , B och C gäller att om $A \neq 0$ och $AB = AC$, så är $B = C$.
 - (d) Om det linjära höljet av tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ är $\mathbb{R}^3$, så är de linjärt oberoende.
 - (e) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är även $0.2\mathbf{x}_1 + 0.8\mathbf{x}_2$ en lösning till detta ekvationssystem.

Del 2: Överbetygsdelen

8. Bestäm för alla värden på konstanterna a och b , antalet lösningar till (4 p)

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_4 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - 8x_3 - 4ax_4 = 1 \end{cases}$$

9. Låt $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning med matrisen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

och låt P vara parallelepipeden som har ett hörn i origo och de tre närmsta angränsande hörnen i punkterna $B = (-1, 2, 5)$, $C = (4, -2, 12)$ och $D = (3, 7, 2)$. Beräkna volymen av $T(P)$. (4 p)

10. Låt A vara en $n \times n$ -matris, och $\mathbf{u}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$.

- (a) Visa att $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$. (1 p)
- (b) Visa att om $A^T A \mathbf{u} = \mathbf{0}$, så är $A \mathbf{u} = \mathbf{0}$. (Det är tillåtet att använda resultatet i (a) även om man inte lyckas bevisa det.) (3 p)

Lycka till!
/Hossein

Anonym kod	LMA019 Algebra 2017-10-26	Poäng
------------	-------------------------------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Beräkna alla lösningar till ekvationen $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$. (3 p)

Lösning:

Svar:

- (b) Bestäm alla värden på konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + a^2y = a \end{cases}$$

saknar lösning.

Lösning:

Svar:

- (c) Beräkna inversen till (3 p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Svar:

- (d) Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkten $(1, 1, -2)$ och innehåller den räta linjen (3 p)

$$\frac{x+1}{2} = y-1 = z$$

Lösning:

Svar:

- (e) Lös ekvationen $z^3 + 8i = 0$ och rita ut rötterna i det komplexa talplanet. (3 p)

Lösning: