Algebra, LMA019, ht 2017, Föreläsning 1.1

<u>Idag:</u> * Grundläggande trigonometri
* Viktiga vinklar
* Användbara identiteter

<u>Grundläggande trigonometri:</u> (Appendix D)

Finns två sätt att ange vinklar:

(i) grader: 1 varv = $360°$

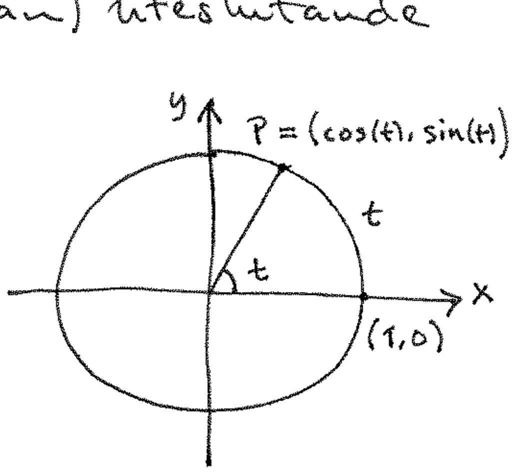
(ii) radianer: 1 varv = enhetscirkelns omkrets = 2π

Vi har alltså att:

$$\alpha \text{ radianer} = \alpha \cdot \frac{360}{2\pi} = \frac{180\alpha}{\pi} \text{ grader}$$

$$\beta \text{ grader} = \beta \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\beta\pi}{180} \text{ radianer}$$

Inom matematiken är det (nästan) uteslutande radianer som gäller!



<u>Definition:</u> Låt $P(t)$ vara den punkt på enhetscirkelns periferi som svarar mot en cirkelbåge av längd t mätt med $(1,0)$ som utgångspunkt. Vi definierar talen

$\cos(t)$ och $\sin(t)$

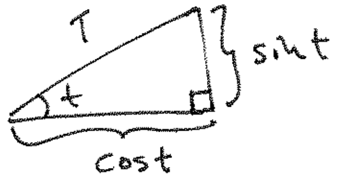
som x- resp. y-koordinaten för punkten $P(t)$.

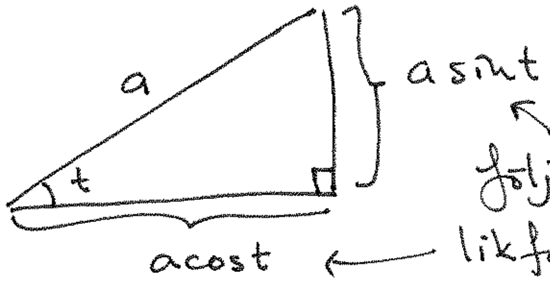
Omedelbara egenskaper:

I.

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\cos(t)$	1	0	-1	0
$\sin(t)$	0	1	0	-1

II.





följer av likformighet!

Alltså:

$\cos(t)$ = förhållandet mellan närliggande katet och hypotenusa

$\sin(t)$ = förhållandet mellan motstående katet och hypotenusa

III. $\cos(t)$ och $\sin(t)$ är båda periodiska med perioden 2π, dvs

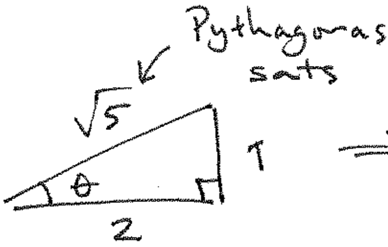
$$\cos(t + 2\pi \cdot n) = \cos(t) \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(t + 2\pi \cdot n) = \sin(t)$$

Definition: $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ = förhållandet mellan motstående och närliggande katet

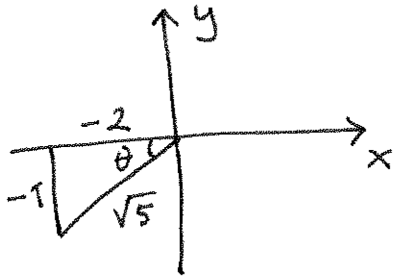
$$\cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Ex. Vad är $\sin\theta$ och $\cos\theta$ om $\tan\theta = \frac{1}{2}$ och $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Lösn.: $\tan\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$

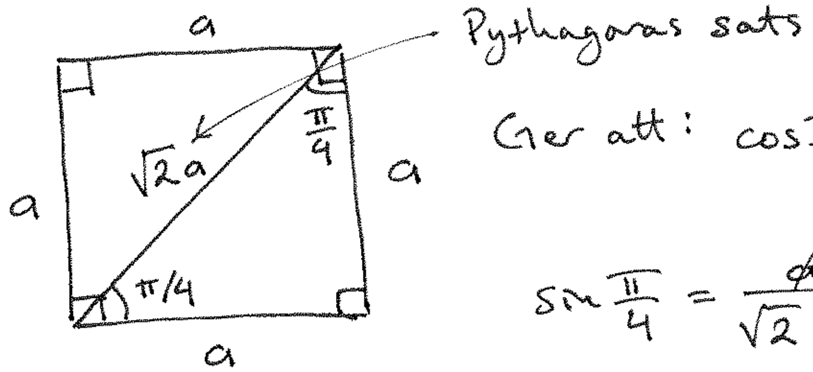


$\Rightarrow$



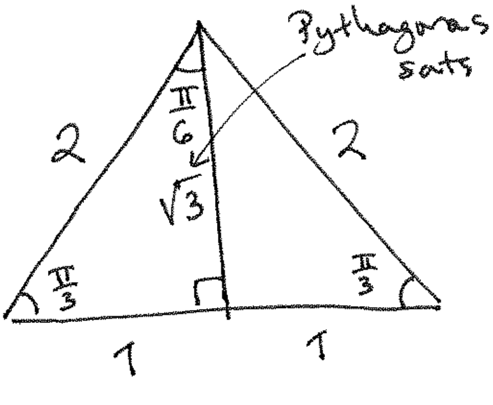
$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Viktiga vinklar: ($\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/6$)



Ger att: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\cancel{a}}{\sqrt{2}\cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Ger att:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

Användbara identiteter:

(i) $\cos(-x) = \cos(x)$

(ii) $\sin(-x) = -\sin(x)$

(iii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(iv) $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$

(v) $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Lär er (i)–(v) utantill!

(i)–(iii) följer direkt ur definitionen

(iv)–(v) krångligt!

Alla andra trigonometriska identiteter går att härleda med (i)–(v)

(vi) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

(vii) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

(viii) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

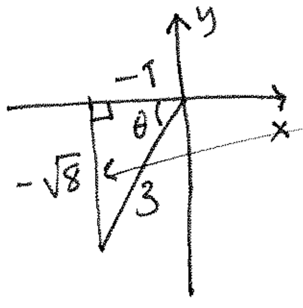
(ix) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 =$

$= 1 - 2\sin^2(x)$

Ex. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos x + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\sin x = \sin(x)$

Ex. Vad är $\sin(2\theta)$ om $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$ och $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$?

Lösn.: $\cos\theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow$



Pythagoras sats:

$-\sqrt{3^2 - 1^2} = -\sqrt{8} =$

$= -\sqrt{4 \cdot 2} = -2\sqrt{2}$

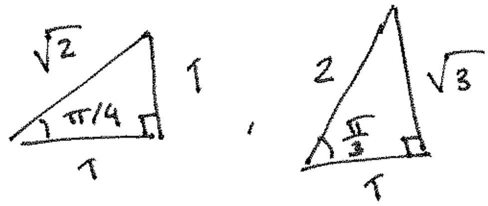
$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Ex. Beräkna $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (exakt!)

Lösn.: $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$= \Big\{$  $\Big\} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

Ex. Visa att $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$

Bevis: $VL = \tan(2\theta) = \dfrac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos(\theta+\theta)} =$

$$= \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)} = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{2\sin(\theta)\cancel{\cos(\theta)}}{\cos^{\cancel{2}}(\theta)\left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right)} = \frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2} =$$

$$= 2\cdot\tan(\theta)\cdot\frac{1}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} \quad \blacksquare$$

Ex. Beräkna alla $x \in [0, 2\pi]$ s.a.

$$2\cos(x) + \sin(2x) = 0.$$

Lösn.: $2\cos(x) + \sin(2x) = 0 \iff$

$$\iff 2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos(x)\big(1 + \sin(x)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{eller} \quad 1 + \sin(x) = 0$$

(i) $\cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{3\pi}{2}$

(ii) $1 + \sin(x) = 0 \iff \sin(x) = -1$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} = x_2$$

$$\therefore \ x_1 = \frac{\pi}{2}, \ x_2 = \frac{3\pi}{2}$$