Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 1.2

Idag: * Komplexa tal

* Polär form

* Räkneregler

Komplexa tal: (Appendix H)

Det reella talsystemet har en mycket otrevlig egenskap: Det finns ekvationer som saknar lösning. T.ex. $x^2 = -1$.

För att råda bot på detta inför vi

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ och } i = \sqrt{-1} \}$$

Den naturliga frågan då vi utökar talsystemen med $\mathbb{C}$ är:

"Vilka egenskaper har dessa tal?"

INTE

"Vad innebär $\sqrt{-1}$?"

Återigen: Tal av formen $a+ib$ är något vi inför för att ekvationer av typen $x^2 = -1$ ska ha en lösning. Det är meningslöst att fråga sig vad $\sqrt{-1}$ "egentligen betyder".

Definition: Låt $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$x = \mathrm{Re}(z)$ kallas för realdelen av z

$y = \mathrm{Im}(z)$ kallas för imaginärdelen av z

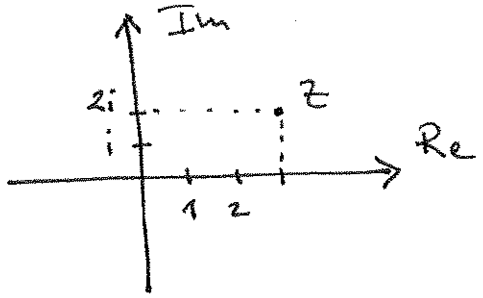
$\bar{z} = x - iy$ kallas för z:s komplexa konjugat

Ex. $z = 7 - \sqrt{2}\,i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 7, \ \mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$

$\bar{z} = 7 + \sqrt{2}\,i$

Polär form:

Geometriskt tänker vi på $\mathbb{R}$ som en linje, tallinjen. Då ett komplext tal, $a+ib$, består av ett talpar (a,b) är det naturligt att identifiera $\mathbb{C}$ med planet



$\mathbb{C}$ kallas därför ofta för det komplexa talplanet.

Betraktar vi $\mathbb{C}$ såhär ser vi att det går att skriva ett komplext tal / punkt i planet, z, på två sätt:

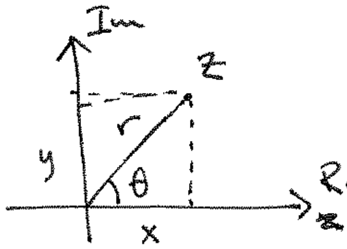
1. Genom att ange dess x- resp. y-koord. dvs det vanliga $z = x + iy$

2. Genom att ange dess avstånd från origo och dess vinkel till den positiva halvan av x-axeln.

Formen 2. kallas för <u>polär form</u>.

Hur översätter vi mellan 1. och 2.?

<u>2. ⇒ 1.</u>: Antag att avstånd, r, och vinkel, θ, givna. Då gäller att:



$$z = r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta$$

<u>1. ⇒ 2.</u>: Antag att $z = x + iy$ given.

Då gäller att:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$ (beloppet av z, eng. "modulus")

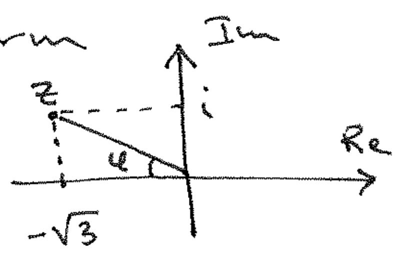
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{högra halvplanet, } Q_1 \cup Q_4 \\ \pi + \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & \text{vänstra halvplanet, } Q_2 \cup Q_3 \end{cases}$$

(argumentet)

Därför skriver man ofta komplexa tal på polär form som

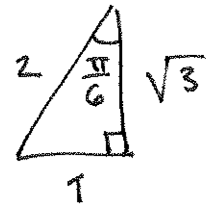
$$z = |z|\left(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\right)$$

<u>Ex.</u> Skriv $z = -\sqrt{3} + i$ på polär form



<u>Lösn.</u>: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$



$$\Rightarrow \arg(z) = \pi - \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{5\pi}{6} \quad (+\,2\pi \cdot n,\ n \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \quad z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Obs! Av arg:s definition framgår att $\theta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ fungerar precis lika bra.

$\therefore$ arg ej entydig (inte en funktion!)

Räkneregler:

Definition: Givet två komplexa tal $w = a + ib$ och $z = x + iy$ definierar vi deras summa och produkt som

$$w + z = (a + x) + i(b + y)$$
$$wz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

Subtraktion och division definieras precis likadant fast tvärtom! Enkelt att se vad subtraktion blir:

$$w - z = (a - x) + i(b - y)$$

Vad blir division? Enklaste sättet är att förlänga med konjugatet till nämnaren.

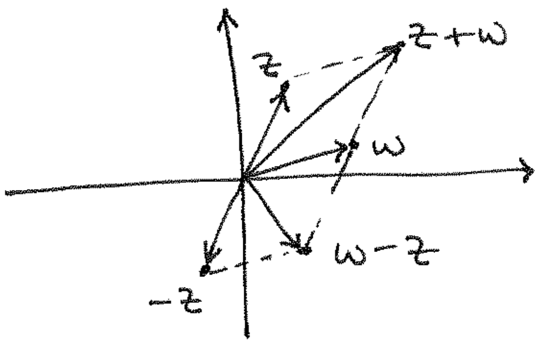
Ex. Skriv $\frac{1+2i}{3-5i}$ på formen $a+ib$

Lösn.: $\frac{1+2i}{3-5i} = \frac{(1+2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{3-10+6i+5i}{9-(5i)^2} =$

$= \frac{-7+11i}{9+5} = \frac{-7}{14} + \frac{11}{14}i$

I allmänhet: $\frac{a+ib}{x+iy} = \frac{(ax+by)+i(bx-ay)}{x^2+y^2}$

Vad innebär dessa räkneoperationer geometriskt?



För multiplikation och division behöver vi först skriva om w och z på polär form:

$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

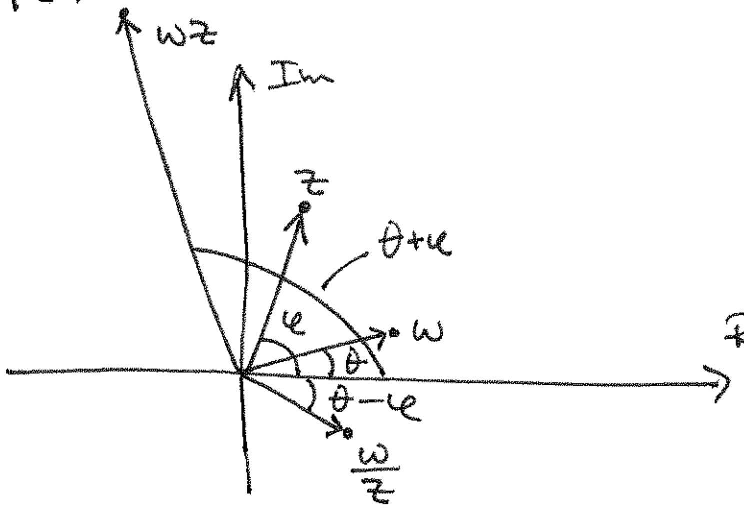
$\Rightarrow wz = |w||z|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= |w||z|\big(\underbrace{\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi}_{\cos(\theta+\varphi)} + i(\underbrace{\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi}_{\sin(\theta+\varphi)})\big)$

$\therefore |wz| = |w||z|$, $\arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$

På motsvarande sätt kan man visa

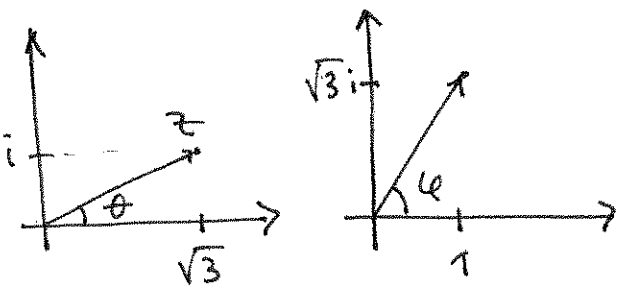
$$\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}, \quad \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg(w) - \arg(z)$$



<u>Ex.</u> Låt $z = \sqrt{3} + i$, $w = 1 + \sqrt{3}i$ och beräkna zw och $\frac{z}{w}$ genom att först skriva z och w på polär form.

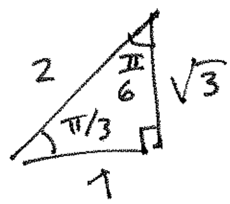
<u>Lösn.</u>: $|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$|w| = \sqrt{1+3} = 2$



$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$



$$\Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow zw = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$