Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 1.3

Repetition:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(i) $zw = |z||w|(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

(ii) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi))$

Idag:

* de Moivres sats
* Komplexa rötter
* Analytisk geometri i 3D
* Vektorer

de Moivres sats: (Appendix H)

Antag att $z = x+iy$ är sådant att $|z| = 1$, dvs

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{på polär form}$$

Då gäller att:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = z^2 = z\cdot z = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = z^3 = z^2\cdot z = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Vi har härmed "bevisat"

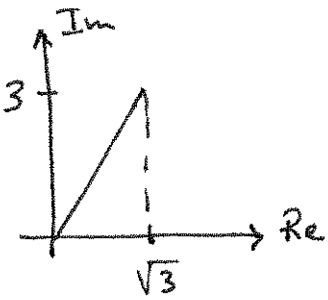
de Moivres sats:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Denna kan underlätta livet avsevärt!

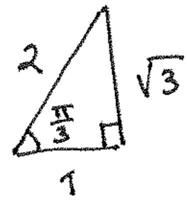
<u>Ex.</u> Skriv talet $(\sqrt{3}+3i)^{18}$ på formen $a+ib$

<u>Lösn.</u>: Låt $z=\sqrt{3}+3i$. $|z|=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$



$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\arctan(\sqrt{3})=$$

$$=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$



$$\therefore\quad \sqrt{3}+3i=\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(\sqrt{3}+3i)^{18}=(\sqrt{12})^{18}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{18}=$$

$$=\{\text{de Moivre}\}=12^9\left(\cos\left(\frac{18\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{18\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=12^9\left(\cos(6\pi)+i\sin(6\pi)\right)=12^9\left(\underbrace{\cos 0}_{=1}+i\underbrace{\sin 0}_{=0}\right)=12^9$$

<u>Sats</u>: (Eulers formel) $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

<u>Bevis</u>: Ingår ej!

<u>Ex.</u> $\sqrt{3}+3i=\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{12}\,e^{i\pi/3}$

de Moivres sats säger att $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$, $n\in\mathbb{Z}$ funkar alltså även med $\mathbb{Q}$

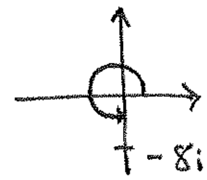
<u>Komplexa rötter:</u>

M.h.a. de Moivre/Euler kan man lösa ekvationer av formen $z^n=a+ib$. Detta illustreras bäst med ett exempel:

Ex. Lös ekvationen $z^3 = -8i$. Rita ut rötterna i det komplexa talplanet.

Lösn.: **Steg 1:** Skriv om HL på polär form

$$-8i = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 8e^{i3\pi/2}$$



Steg 2: Lägg till n varv, $n \in \mathbb{Z}$

$$-8i = 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Steg 3: Skriv upp ekvationen och dra roten ur

$$z^3 = -8i \iff z^3 = 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}$$

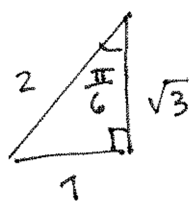
$$\Rightarrow z = (8)^{1/3}\left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}\right)^{1/3} = 2e^{i\left(\underbrace{\frac{3\pi}{6}}_{=\frac{\pi}{2}} + \frac{2\pi n}{3}\right)}$$

Nu svarar inte längre olika värden på n mot hela varv. Vi får olika z för några olika värden på n (i vårt fall $n = 0, 1, 2$ då $n = 3$ innebär ett helt varv).

Steg 4: Beräkna de olika lösningarna

$$\underline{n=0}: \quad z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)} = 2\left(\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{=0} + i\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{=1}\right) = 2i$$

$$\underline{n=1}: \quad z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i7\pi/6} =$$



$$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\overbrace{\cos\pi}^{=-1}\cos\frac{\pi}{6} - \cancel{\overbrace{\sin\pi}^{=0}\sin\frac{\pi}{6}} + i\left(\cancel{\overbrace{\sin\pi}^{=0}\cos\frac{\pi}{6}} + \overbrace{\cos\pi}^{=-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

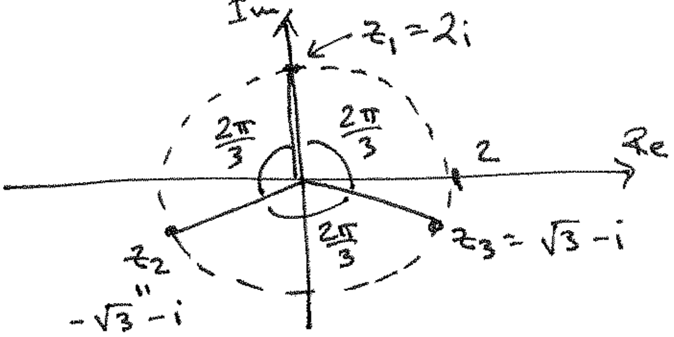
$\underline{n=2:}$ $z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i 11\pi/6} =$

$$= 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos 2\pi \cos\frac{\pi}{6} + \cancel{\sin 2\pi} \sin\frac{\pi}{6} + i\left(\cancel{\sin 2\pi} \cos\frac{\pi}{6} - \cos 2\pi \sin\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

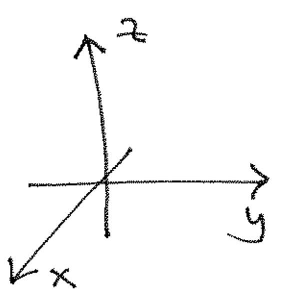
<u>Steg 5</u>: Rita ut punkterna. Börja med en lösning du känner och gå n:te dels varv.



<u>Kapitel 12</u>: Analytisk geometri

<u>3D-koordinatsystem</u>: (12.1)

<u>Notation</u>: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rummet



Välj koord. axlarna så att:

x = tummen, y = pekfingret, z = långfingret

på <u>högerhanden</u>. Detta kallas för ett <u>högerorienterat system</u>.

Om (x_1, y_1, z_1) och (x_2, y_2, z_2) är två punkter i $\mathbb{R}^3$ så ges <u>avståndet</u> mellan dem av

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

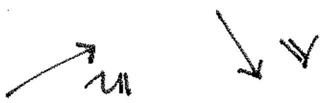
Följer av Pythagoras sats på samma sätt som i $\mathbb{R}^2$.

<u>Vektorer</u>: (12.2)

<u>Definition</u>: En vektor är en matematisk storhet som omfattar både en <u>riktning</u> och en <u>längd</u>, dvs en riktad sträcka.

Vektorer brukar ritas som pilar och betecknas med tjocka bokstäver

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$

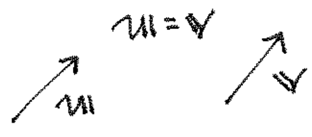


(ibland med pilar över "vanliga" bokstäver: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$)

<u>Ex.</u> Hastighet — riktning
— fart

<u>Längden</u> på en vektor $\mathbf{v}$ betecknas $|\mathbf{v}|$.

<u>Obs!</u> En vektor bestäms <u>endast</u> av en riktning och en längd, ingen fix position.
(Kraft = vektor + angreppspunkt)



En vektor $\mathbf{v}$ som börjar i en punkt A och slutar i en punkt B, skrivs $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$