# Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 2.1

## Repetition:

- $x$ = tummen, $y$ = pekfingret, $z$ = långfingret på högerhanden är ett högerorienterat system
- Definition: En vektor är en riktad sträcka (tänk hastighet)
- $|\mathbf{v}|$ vektorn $\mathbf{v}$:s längd.

## Idag:

* Vektorer (forts.)
* Skalärprodukter
* Projektioner

## Vektorer: (12.2)

Givet ett koordinatsystem skrivs en vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \leftarrow \text{Stewart-notation}$$

$v_1$ = riktning längs x-axeln

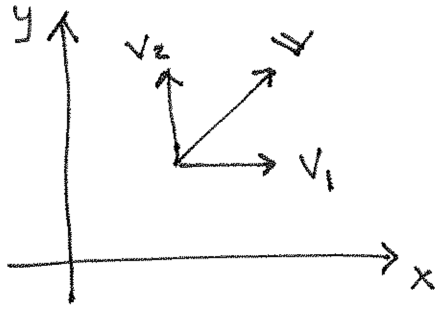
$v_2$ — " — y-axeln

$v_3$ — " — z-axeln

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ kallas för vektorn $\mathbf{v}$:s komponenter

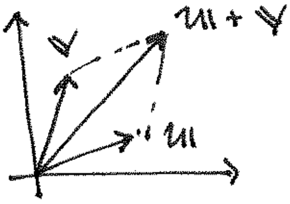
Följer att:

I. $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$




II. $\overrightarrow{AB} = B - A$

$\Rightarrow$ Givet ett koordinatsystem ä punkter och vektorer två olika perspektiv av samma "sak"




<u>Enkla egenskaper</u>:

(i) Vektorer kan adderas och subtraheras

(ii) Vektorer kan multipliceras med reella tal $\leftarrow$ skalärer

<u>Ex</u>. Låt $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ och $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 3 \rangle$.

Beräkna $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

<u>Lösn.</u>: $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3-(-4) \\ 6-0 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \langle 7, 6, 3 \rangle$$

<u>Definition</u>: 1. Om $|\mathbf{v}| = 1$ kallas $\mathbf{v}$ för en <u>enhetsvektor</u> (eng.: unit vector). (Detta brukar ibland markeras $\hat{\mathbf{v}}$.)

2. Vi har de s.k. <u>standardbasvektorerna</u>

$\langle 1, 0, 0 \rangle = \mathbf{i}$ eller $\mathbf{e}_1$ eller $\hat{x}$

$\langle 0, 1, 0 \rangle = \mathbf{j}$ eller $\mathbf{e}_2$ eller $\hat{y}$

$\langle 0, 0, 1 \rangle = \mathbf{k}$ eller $\mathbf{e}_3$ eller $\hat{z}$

# Skalärprodukter: (12.3)

Vi har sett att vektorer kan adderas och subtraheras samt multipliceras med skalärer ← reella tal

Kan man multiplicera och dividera med vektorer på något användbart sätt?

Division med vektorer är inte väldefinierat!

$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}$ ← Saknar mening!

Däremot finns två användbara definitioner av multiplikation.

Definition: Givet två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definierar vi deras skalärproduct som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$ ← skalär (reellt tal)

Ibland används även beteckningen inre produkt.
(eng.: dot product, scalar product, inner product)

Ex. Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 1)$. Beräkna $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Lösn.: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -3 + 4 = 1$

Enkla egenskaper:

(i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(ii) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(iii) $(t\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$, $t\in\mathbb{R}$

(iv) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

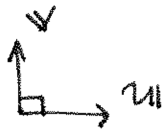
Anledningen till att skalärprodukten är en viktig och användbar operation är följande:

<u>Sats</u>: Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller att

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$


då $\theta$ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. $(0 \le \theta \le \pi)$

Omedelbar konsekvens:

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ($\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vinkelräta, 

)

$$\Longleftrightarrow$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ (då $\cos\frac{\pi}{2} = 0$)

<u>Ex</u>. Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u} = \langle 1,-1,0\rangle$ och $\mathbf{v} = \langle 0,1,2\rangle$.

<u>Lösn.</u>: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} =$

$$= \frac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

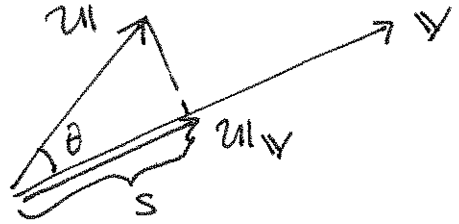
$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

(Det räcker alltså att svara i termer av inversa trigonometriska funktioner.)

## Projektioner: (12.3)

Inom t.ex. fysiken vill man ofta veta hur "stor del" av en vektor som pekar i en annan vektors riktning.

**Definition:**




$\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ kallas för vektorprojektionen av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{v}$
$s$ — " — skalärprojektionen — " —

**Sats:** $s = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ , $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$

**Bevis:** Givet: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ Sökt: $s$, $\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$

Om $\theta$ känd så $s = |\mathbf{u}|\cos\theta$

$$\Rightarrow s = |\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$\mathbf{u}_{\mathbf{v}}$ pekar i $\mathbf{v}$:s riktning och har längden $s$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = s\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \qquad \blacksquare$$

**Ex.** Finn vektor- och skalärprojektionen av $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 3\rangle$ längs $\mathbf{v} = \langle 1, 0, -1\rangle$

**Lösn.:** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-1) = 1 - 3 = -2$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{-2}{(\sqrt{2})^2}\langle 1, 0, -1 \rangle =$$

$$= \langle -1, 0, 1 \rangle$$

$$s = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0 \ ?$$