# Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 2.2

## Repetition:

- Definition: En vektor är en riktad sträcka

  I ett koord. system: $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

- $|\mathbf{v}|$ vektorns längd. I ett kood. syst.: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

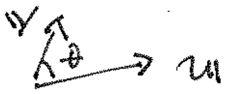
- Vektorer kan adderas, subtraheras & multipliceras med skalärer (reella tal)

- Definition: Givet $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ definieras skalärprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

- Sats: Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller att

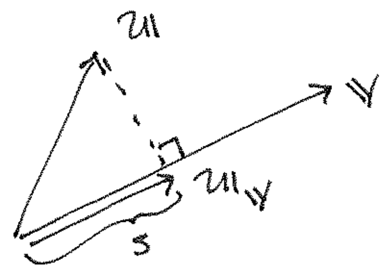
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$$




  där $\theta$ vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

- Sats: $s = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ skalärprojektionen av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{v}$

  $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$ vektorprojektionen av $\mathbf{u}$ längs $\mathbf{v}$




## Idag:

* Kryssprodukter

* Linjer i $\mathbb{R}^3$

## Kryssprodukter: (12.4)

Definition: Givet två vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och

$\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definierar vi deras <u>kryssprodukt</u>

(alt. <u>vektorprodukt</u>) som:

$$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2 \, , \, u_3 v_1 - u_1 v_3 \, , \, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$

<u>Obs!</u> Gäller endast i $\mathbb{R}^3$!

<u>Ex.</u> Låt $\mathbb{u} = (1,2,3)$, $\mathbb{v} = (1,0,2)$. Beräkna $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$.

<u>Lösn.</u>: $\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \langle 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \, , \, 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \, , \, 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \rangle =$

$$= \langle 4, 1, -2 \rangle$$

Är det vårt besväret?

<u>Enkla egenskaper</u>:

(i) $\mathbb{u} \times \mathbb{u} = \mathbb{0} = (0,0,0)$

(ii) $\mathbb{u} \times \mathbb{v} = - \mathbb{v} \times \mathbb{u}$

(iii) $\mathbb{u} \times (\mathbb{v} + \mathbb{w}) = \mathbb{u} \times \mathbb{v} + \mathbb{u} \times \mathbb{w}$

(iv) $(t\mathbb{u}) \times \mathbb{v} = \mathbb{u} \times (t\mathbb{v}) = t(\mathbb{u} \times \mathbb{v}) \quad t \in \mathbb{R}$

(v) $\mathbb{u} \cdot (\mathbb{u} \times \mathbb{v}) = \mathbb{v} \cdot (\mathbb{u} \times \mathbb{v}) = 0$

Vektorn $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ är vinkelrät mot både $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$.

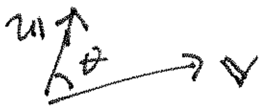
I själva verket gäller att:

$\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ och $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ "bildar" ett högerorienterat koordinatsystem.

Därtill har vi följande mycket användbara:

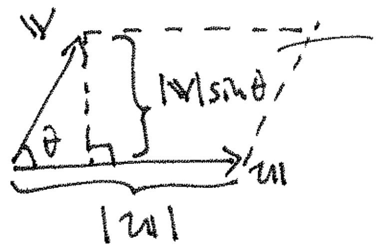
<u>Sats</u>: Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller att

$$|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$$




där $\theta$ vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$

Vad innebär detta geometriskt?



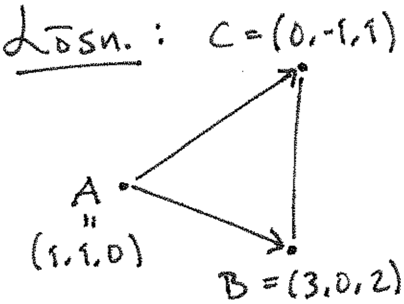

Area parallellogram =

$= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$

<u>Ex</u>. Beräkna arean av triangeln med hörnen

$A=(1,1,0)$, $B=(3,0,2)$ och $C=(0,-1,1)$

<u>Lösn.</u>:




$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle 2, -1, 2\rangle$

$\overrightarrow{AC} = C - A = \langle -1, -2, 1\rangle$

Area triangel $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| =$

$= \ldots = \frac{5}{\sqrt{2}}$ a.e.

Det är vårt det!

Vi har (som tur är) följande minnesregel:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\mathbf{i}} & \overset{-}{\mathbf{j}} & \overset{+}{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(u_2v_3 - u_3v_2) - \mathbf{j}(u_1v_3 - u_3v_1) + \mathbf{k}(u_1v_2 - u_2v_1) =$$

$$= \langle u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1\rangle$$

Ex. Finn en enhetsvektor som är vinkelrät mot $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ och $\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

Lösn.: Låt $\mathbf{u}=\mathbf{i}-\mathbf{j}=\langle 1,-1,0\rangle$. $\mathbf{v}=\mathbf{j}-2\mathbf{k}=\langle 0,1,-2\rangle$

Vet att: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&-1&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=\langle 2-0,-(-2-0),1\cdot1-0\cdot(-1)\rangle=$$

$$=\langle 2,2,1\rangle \leftarrow \text{rätt riktning, fel längd}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}\langle 2,2,1\rangle=\frac{1}{3}\langle 2,2,1\rangle \leftarrow \text{rätt riktning, rätt längd}$$

## Linjer i $\mathbb{R}^3$: (12.5)

För att beskriva en linje i planet behövs:

I. Skärningen med y-axeln: $m\in\mathbb{R}$ ($\Leftrightarrow (0,m)$)

II. En lutning: $k\in\mathbb{R}$

För att beskriva en linje, $\ell$, i rummet behövs:

I. En punkt på linjen: $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$

II. En riktning: $\mathbf{v}=\langle a,b,c\rangle$

Varje annan punkt på linjen kan då nås genom att börja i $\mathbf{x}_0$ och gå lämpligt antal steg i $\mathbf{v}$:s riktningen.

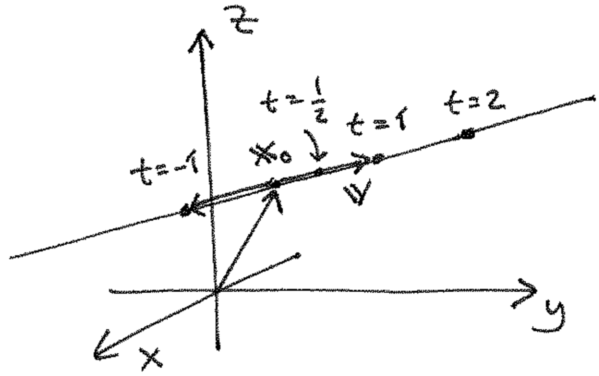
Alltså ges linjen av:

$\ell = \{ \mathbb{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ \mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + t\mathbb{v},$ för något $t \in \mathbb{R} \}$

Eller mer slarvigt ← <u>Vektorparametrisk form</u>

$\ell : \mathbb{x} = \mathbb{x}_0 + t\mathbb{v}, \ t \in \mathbb{R}$ (eng.: vector equation of $\ell$)

Skriver vi ut allt får vi




$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad (*)$$

<u>Skalärparametrisk form</u>

(eng.: parametric equations of $\ell$)

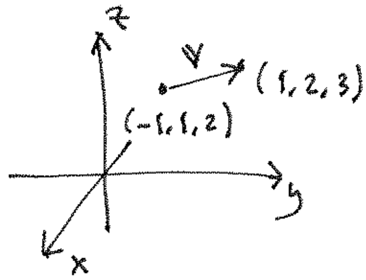
Lös ut $t$ ur $(*)$:

$$t = \frac{x - x_0}{a}, \quad t = \frac{y - y_0}{b}, \quad t = \frac{z - z_0}{c}$$ (förutsatt att $a, b, c \neq 0$)

dvs

$$\ell : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ ← <u>Standardform</u> (symmetric eq. of $\ell$)

<u>Ex.</u> Låt $\ell$ vara den räta linjen genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(-1, 1, 2)$. Skriv $\ell$ på vektorparametrisk- och standardform.




<u>Lösn.</u>: $\mathbb{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \ell : \mathbb{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\ell : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x+1}{2}, \quad t = y-1 = \frac{y-1}{1}, \quad t = z-2 = \frac{z-2}{1}$$

$$\therefore \ \ell : \ \frac{x+1}{2} = y-1 = z-2$$

<u>Bonus</u>: Bestäm punkten där linjen $\ell$ skär $xy$-planet.

<u>Lösn.</u>: $\ell$ skär $xy$-planet då $z=0$

$$\Rightarrow \quad y-1 = \overset{=0}{z}-2 \iff y-1=-2 \iff y=-1$$

$$\frac{x+1}{2} = z-2 \iff \frac{x+1}{2} = -2 \iff x+1=-4$$

$$\iff x = -5$$

$\therefore$ skärningspunkt: $(-5, -1, 0)$