Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 2.3

Repetition:

- Vektor < Riktning, Längd   Ingen fix position!

- $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ kan mult. på två sätt:

I. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ skalärprodukt

II. $$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\mathbf{i}} & \overset{-}{\mathbf{j}} & \overset{+}{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$ kryssprodukt

- Viktiga egenskaper:

(i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$

(ii) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bildar ett högerorienterat system

(iii) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\theta$

- Räta linjer i $\mathbb{R}^3$

$$\ell = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \text{ för något } t \in \mathbb{R} \}$$

där $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pkt. på linjen och $\mathbf{v} = (a, b, c)$ riktningsvektor för linjen.

Mer slarvigt:

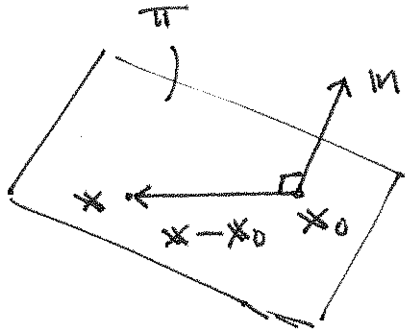
$\ell: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$ vektorparametrisk form

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$ skalärparametrisk form

$$\ell: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$ standardform

Idag:

* Plan
* Avstånd



Plan: (12.5)

För att beskriva ett plan, π, i rummet behövs:

I. En (normal-)riktning. $\mathbf{n} = (A, B, C)$

II. En punkt i planet. $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Varje annan punkt $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ligger då i planet om:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \perp \mathbf{n} \iff (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \iff$$

$$\iff (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0 \iff$$

$$\iff A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \iff$$

$$\iff Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = \text{konstant } D$$

Ett plan, π, bestäms alltså av en ekvation av formen

$$\pi: Ax + By + Cz = D \quad (ax + by + cz + d = 0 \text{ i Stewart})$$

Mer noggrant:

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz = D.\ A, B, C, D \in \mathbb{R} \text{ konst.}\}$$

Ex. Ta fram en ekvation för det plan som går genom punkten (1, 2, 3) och har normalvektor $\mathbf{n} = \langle 4, 5, 6 \rangle$.

Lösn.: $\mathbf{n} = \{4,5,6\} \Rightarrow A = 4,\ B = 5,\ C = 6$

dvs $\pi: 4x + 5y + 6z = D \quad (*)$

Återstår D! För att gå genom $(1,2,3)$ måste $(*)$ vara uppfylld då $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ dvs

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = D \Leftrightarrow D = 32$$

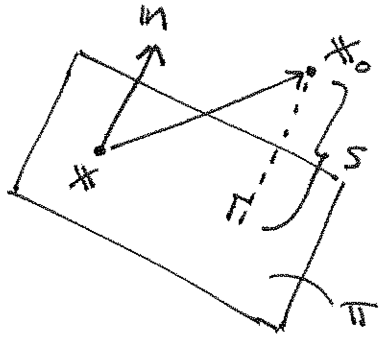
$$\therefore \pi: 4x + 5y + 6z = 32$$

Avstånd: (12.5)

Givet: punkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

plan $\pi: Ax + By + Cz = D$

Sökt: Minsta avståndet s



Välj $\mathbf{x} \in \pi$ godtyckligt och bilda vektorn $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$

s är beloppet av skalärprojektionen av $\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$.

$$\Rightarrow s = \frac{|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$\mathbf{x} \in \pi \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = Ax + By + Cz = D$$

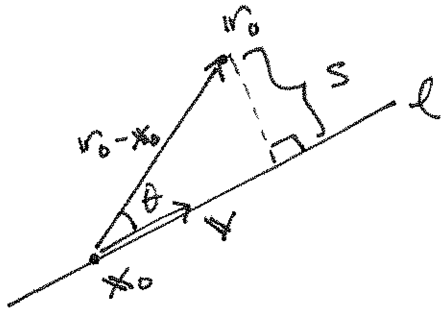
$$\therefore s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ex. Vad är minsta avståndet från punkten $(1,0,1)$ till planet $2x - y + z = 5$?

Lösn.: $s = \dfrac{|2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot 1 - 5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{|-2|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ l.e.

Givet: punkt $\mathbf{r}_0$

linje $\ell: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v},\ t \in \mathbb{R}$



Sökt: minsta avståndet s

Om θ känd så $s = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0| \sin\theta$

$$\Rightarrow s = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0|\sin\theta = \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0||\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0)\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Ex. Bestäm minsta avståndet från punkten $(3,-2,4)$ till linjen $\ell: \mathbf{x} = (-1,1,2) + t(2,1,1),\ t \in \mathbb{R}$.

Lösn.: Låt $\mathbf{r}_0 = (3,-2,4)$, $\mathbf{x}_0 = (-1,1,2)$, $\mathbf{v} = (2,1,1)$

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0 = (4,-3,2)$$

$$(\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0)\times\mathbf{v} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = (-5, 0, 10)$$

$$|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0)\times\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

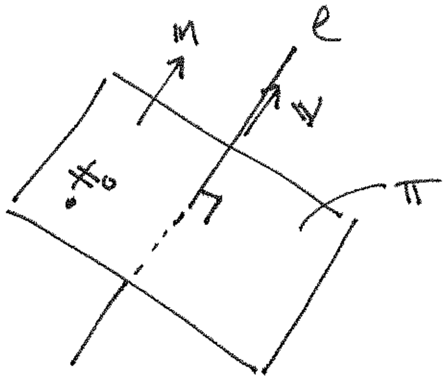
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore\ s = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{\frac{5}{6}} \text{ l.e.}$$

Dags för lite problemlösning!

Ex. Ta fram ekvationen för planet som går genom $\mathbf{x}_0 = (1,0,1)$ och är vinkelrät mot linjen

$$\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$



Lösn.: Ser att:

$\ell \perp \pi \Leftrightarrow n \parallel v$ ← parallell med

Hitta v!

$$\left.\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{2} \Leftrightarrow x = 1+2t \\ t = \frac{y+1}{-1} \Leftrightarrow y = -1-t \\ t = \frac{z-2}{3} \Leftrightarrow z = 2+3t \end{array}\right\} \Rightarrow v = (2,-1,3)$$

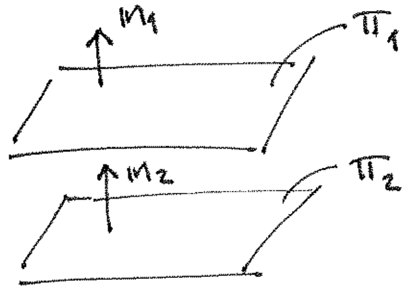
$\therefore n = (2,-1,3)$ (längden av n är irrelevant!)

$\Rightarrow A=2,\ B=-1,\ C=3$ dvs $\pi: 2x-y+3z=D$

$x_0 = (1,0,1) \in \pi \Rightarrow D = 2\cdot 1 - 0 + 3\cdot 1 = 5$

$$\therefore \pi: 2x-y+3z=5$$

Ex. Visa att planen $\pi_1: 2x-3y+z=4$, $\pi_2: 3+6y=4x+2z$ är parallella och bestäm avståndet mellan dem.



Lösn.: Ser att: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2$

$\pi_1: 2x-3y+z=4 \Rightarrow n_1 = (2,-3,1)$

$\pi_2: 3+6y=4x+2z \Leftrightarrow 4x-6y+2z=3$

$\Rightarrow n_2 = (4,-6,2)$

Två vektorer u, v är parallella om det finns en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $u = \lambda v$.

$$n_2 = (4,-6,2) = 2(2,-3,1) = 2n_1$$

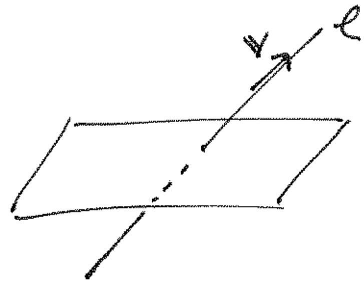
$$\therefore \quad n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2 \quad \blacksquare$$

s = Avstånd mellan π_1 & π_2 = Avstånd från godt. punkt $x_0 \in \pi_1$ till π_2

Ser att: $x_0 = (2,0,0) \in \pi_1$

$$\Rightarrow s = \frac{|x_0 \cdot n_2 - 3|}{|n_2|} = \frac{|8-3|}{\sqrt{16+36+4}} = \frac{5}{\sqrt{56}} = \frac{5}{2\sqrt{14}} \text{ l.e.}$$

<u>Ex.</u> Bestäm skärningspunkten mellan den räta linjen genom de två punkterna $(1,1,-1)$ och $(-1,-2,0)$ och planet $2x+3y-z=0$.



<u>Lösn.</u>: $v = (1,1,-1)-(-1,-2,0) = (2,3,-1)$

$$\Rightarrow \ell: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$$

Stoppa in dessa i planets ekv.

$$\Rightarrow 2\cdot(1+2t)+3(1+3t)-(-1-t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+3+1+4t+9t+t = 0 \Leftrightarrow 14t = -6 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+2\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = 1-\frac{6}{7} = 1/7 \\ y = 1+3\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = 1-\frac{9}{7} = -2/7 \\ z = -1-\left(-\frac{3}{7}\right) = -1+\frac{3}{7} = -4/7 \end{cases}$$

$\therefore$ Skärningspkt. $= \frac{1}{7}(1,-2,-4)$