Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 3.1

Repetition:

- Plan

$$\pi = \{ \mathbf{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ Ax + By + Cz = D \quad \underset{\text{konstanter}}{A, B, C, D \in \mathbb{R}} \}$$

Mer slarvigt

$$\pi : \quad Ax + By + Cz = D$$

$$\mathbf{n} = (A, B, C) \text{ normalvektor till planet}$$

- Minsta avståndet, s, från en pkt $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ till ett plan $Ax + By + Cz = D$ ges av

$$s = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Minsta avståndet, s, från en pkt. $\mathbf{r}_0$ till en rät linje $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$ ges av

$$s = \frac{|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Idag:

* Linjära ekvationssystem

* Matriser

* Gausselimination

* Lösningsmängder

Linjära ekvationssystem: (Lay 1.1 - 1.2)

Definition: En linjär ekvation i variablerna $x_1, \dots, x_n$ är en ekvation av formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

där $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

Ex. (a) $x + 2y = 3$ ok!

(b) $x_1^2 + 2x_2 - 4x_3^3 = 4$ ej ok!

(c) $4x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$ ok!

(d) $\sqrt{x} + y - z = 2$ ej ok!

Det finns två huvudmetoder för att lösa system av linjära ekvationer

I. Substitutionsmetoden

Ex. $\begin{cases} x+y=5 & \Rightarrow x+3x-7=5 \Leftrightarrow x=3 \\ 3x-y=7 \Leftrightarrow y=3x-7 & \Rightarrow y=3\cdot 3-7=2 \end{cases}$

Värdelös för större system! Då gäller:

II. Additionsmetoden

Ex. $\begin{cases} x+y=5 & \cdot(-3) \\ 3x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 0-4y=-8 & \cdot\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+0=3 \\ 0+\cancel{4}y = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases}$

Varför fungerar metoden? Jo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 3y = -15 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$$3x - y + (-15) = 7 + (-15) \iff 3x - y + (-3x - 3y) = 7 - 15$$

$$\iff -4y = -8 \quad \ldots$$

Observera att med denna metod ä det endast koefficienterna framför x, y, ... som ä väsentliga. Alltså ä det onödigt att skriva ut x, y, ... i varje led, men då måste vi ta bort + också, annars blir det stor förvirring!

Resultat: <u>Matriser</u>! (eng.: matrix)

<u>Ex.</u> $\begin{cases} x + y \\ 3x - y \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (koeff. matris) $\;$ $\overset{\text{rader}}{2} \times \overset{\text{kolumner}}{2}$-matris

$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}\right]$ utökad koeff. matris (eng.: augmented coeff. matrix)

Additionsmetoden på matrisform kallas <u>radreduktion</u> eller <u>Gausselimination</u>.

<u>Ex.</u> Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 9 \end{cases}$$

Lösn.: Steg 1: Skriv om på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & 9 \end{array}\right]$$

Steg 2: Fixa en "etta" uppe i vänstra hörnet och nollor under

radekvivalent med, dvs de båda matriserna har samma lösningsmängd

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & 9 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

Steg 3: Bortse från kolumn 1 och rad 1 och upprepa steg 2 för den delmatris som blir kvar

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{bmatrix}$$

Steg 4: Radreducera / Gaussa bakåt, dvs fixa nollor ovanför "ettorna"

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4 \quad -1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 155 \\ 0 & 1 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{bmatrix}$$

Steg 5: "Översätt" tillbaka

$$\left(\begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 155 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 88 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \right) \begin{cases} x_1 = 155 \\ x_2 = 88 \\ x_3 = 21 \end{cases}$$

Två ekvationssystem / utökade koefficientmatriser kommer att vara radekvivalenta, dvs ha samma lösningsmängd, under följande operationer:

I. Byta plats på två rader
II. Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$
III. Addera en multipel av en rad till en annan rad

I-III kallas för elementära radoperationer.

Vilken är den geometriska tolkningen av exemplet ovan?

$$\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 = 8 & \text{(i)} \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \text{(ii)} \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 9 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Geometriskt är (i)-(iii) tre olika plan i rummet. Att lösa ekvationssystemet svarar alltså mot att hitta skärningsmängden/-punkten mellan dessa tre plan.

Denna skärningsmängd kan vara:

1. En unik lösning (precis som i exemplet)
2. Oändligt många lösningar
3. Ingen lösning / lösning saknas

Detta (1.-3.) gäller för alla linjära ekvationssystem (behöver inte bara bero på 3 variabler).

Om 1. eller 2. gäller sägs ekvationssystemet vara <u>konsistent</u>, om 3. gäller sägs det vara <u>inkonsistent</u>.

<u>Ex.</u> Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + 4y + 8z = 1 \end{cases}$$

<u>Lösn.</u>: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix} \; 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ \quad -3y - 5z = -3 \\ \qquad 0 = -3 \quad ↯ \text{ Går ej!} \end{cases}$$

$\therefore$ lösning saknas, dvs systemet är inkonsistent!