

Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 3.2

Repetition:

- Definition: En linjär ekvation i $x_1, \dots, x_n$ är en ekv. av formen $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ där $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$
- Två huvudmetoder för lösning av linjära ekvationssystem
 - I. Substitutionsmetoden ← Kass för större system
 - II. Additionsmetoden

- Matriser - Avskalade linjära ekv.system

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \end{array} \right]$$

- Gausselimination = matriser + additionsmetoden
- Två matriser radekvivalenta, dvs har samma lösningsmängd, under operationerna
 - I. Byta plats på två rader.
 - II. Multiplicera en rad med konstant $\neq 0$.
 - III. Addera en multipel av en rad till en annan rad.
- För ett linjärt ekv.system gäller alltid ett av följande:
 - 1. En unik lösning
 - 2. Oändligt många lösningar
 - 3. Ingen lösning ← inkonsistent

} konsistent

Idag:

* Terminologi

* Vektorekvationer

* Linjärkombinationer

* Linjära höljen

Vi börjar dock med ett ex.

Ex. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = -3 \end{cases}$$

Lösning: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ \textcircled{1} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot 3 \sim \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \textcircled{1} \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} 3 & -6 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{3} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 10/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + \frac{10}{3}x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - \frac{10}{3}x_4 \\ x_3 = 1 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Låt $x_2 = t$, $x_4 = s$ fria variabler

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t - \frac{10}{3}s \\ t \\ 1 - \frac{1}{3}s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t, s fria variabler

Terminologi: (1.2)

En matris av formen $\left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & -6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ sägs vara på trappstegsformen (eng.: echelon form)

En matris av formen $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ sägs

vara på reducerad trappstegsform (eng.: reduced echelon form)

De element/komponenter/tal som vi använder då vi Gausseliminering kallas för pivotelement (eng.: pivot positions)

$$\left[\begin{array}{ccccc} 3 & -6 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Arrows point from the text "pivotelement" to the circled 3 in the first row and the circled 3 in the second row. The first row is underlined.

Kolumner som innehåller pivotelement kallas för pivotkolumner.

(Denna "terminologikavalkad" är typisk för linjär algebra. Många olika matematiska områden möts här. Linjär algebra är i stor utsträckning en kurs i matematisk terminologi. Case in point:)

Vektorekvationer: (1.3)

Definition: En ekvation av formen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = b \quad (*)$$

där vektorerna $v_1, \dots, v_n, b$ är givna, kallas för en vektorekvation.

Tidigare tänkte vi geometriskt på ett ekvations-system, som t.ex.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 9 \end{cases}$$

som skärningen mellan tre plan.

Ett annat sätt vore att tänka på det som vektorekvationen

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}}_{v_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}}_b$$

Alltså: Hvar många steg, x_1, x_2 och x_3 , ska man gå i v_1, v_2 respektive v_3 's riktning för att hamna i punkten b ?

Uttryck som vänsterledet i (*) ovan förekommer så ofta att de har fått ett eget namn:

Definition: Givet vektorer $v_1, \dots, v_p$ och skalarer $c_1, \dots, c_p$ kallas uttryck av formen

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_p v_p$$

för en linjärkombination av $v_1, \dots, v_p$.

Ex. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$. För vilka

värden på $h \in \mathbb{R}$ kan b skrivas som en linjärkombination av A 's kolumner?

Lös.: Vill veta för vilka $h \in \mathbb{R}$ vektorekvationen

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (**)$$

är lösbar.

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = h \\ x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \uparrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -3+2h \end{array} \right] \begin{matrix} \textcircled{2} \\ \uparrow \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2h \end{array} \right] \leftarrow \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 7 + 2h \Leftrightarrow \underline{\underline{h = -\frac{7}{2}}}$$

Nära förknippat med linjärkombinationer är begreppet linjärt hölje.

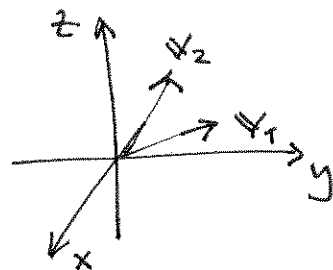
Definition: Mängden av alla linjärkombinationer av vektorerna $v_1, \dots, v_p$ kallas för det linjära höljet (eng.: Span) av $v_1, \dots, v_p$, och skrivs

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

Ex. Låt $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ och $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beskriv $\text{Span}\{v_1, v_2\}$ geometriskt.

Lös.: Vill veta: vilka punkter i $\mathbb{R}^3$ kan vi nå genom att traska i v_1 och v_2 's riktningar.

$\Rightarrow$ Plan, π , som går genom origo och innehåller v_1 och v_2



$$\Rightarrow n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \overset{+}{i} & \overset{-}{j} & \overset{+}{k} \\ 7 & 1 & -6 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi: 18x + 30y + 26z = D$$

$$(0,0,0) \in \pi \Rightarrow D = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \pi: 18x + 30y + 26z = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi: 9x + 15y + 13z = 0$$