

Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 3.3

Repetition:

- Trappstegsform, pivotelement, pivotkolumner

Ex.
$$\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & -3 & 9 & 14 \\ 0 & \textcircled{5} & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & 7 \end{pmatrix}$$
 Trappstegsform

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
pivotkolumner

- Definition: En matris är på reducerad trappstegsform om den är på trappstegsform, alla pivotelement är 1, och alla element ovanför pivotelementen är 0.

- Definition: ~~En~~ En ekvation av formen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = b$$

kallas för en vektorekvation.

- Definition: (i) Givet vektorer $v_1, \dots, v_p$ och skalarer $c_1, \dots, c_p$ kallas uttryck av formen

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$$

för en linjärkombination av $v_1, \dots, v_p$.

- (ii) Mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \dots, v_p$ kallas för det linjära höljet av $v_1, \dots, v_p$ och skrivs

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$$

Idag:

- * Vektorer i $\mathbb{R}^n$
- * Tillämpning av linj. ekv. system
- * Matrisekvationen $Ax = b$
- * Linjärt oberoende

Vektorer i $\mathbb{R}^n$:

Algebraiskt måste inte vektorer nödvändigtvis vara 2D eller 3D

Definition: $\mathbb{R}^n = \left\{ \text{Alla vektorer } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\} \quad n \in \mathbb{N}$

Tänk inte geometriskt på $\mathbb{R}^n$ då $n > 3$!!

Hittills: Geometriska resonemang/intuition har gett oss en algebraisk teori för vektorer i $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$.

Denna algebraiska teori funkar även för vektorer i $\mathbb{R}^n$, $n > 3$. Vi har t.ex.

(i) Addition & subtraktion av vektorer: $u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$

(ii) Multiplikation med skalärer: $c v = \begin{pmatrix} c v_1 \\ \vdots \\ c v_n \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$

(iii) Längd: $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

(iv) Skalärprodukt: $u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

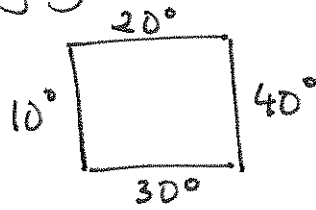
(Vektorprodukt? $\nsubseteq$ Går ej! Inte ens ok i $\mathbb{R}^2$)

Tillämpning av linj. ekv. system:

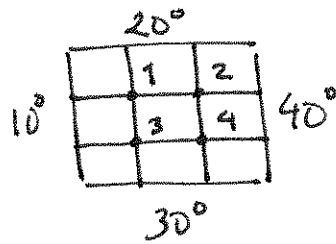
Hur uppkommer linjära ekv. system med mer än 3

obekanta i praktiken?

Ex. Antag att vi har en tunn 2D-platta vars randtemp. är känd, t.ex. följande kvadrat



och att vi vill veta värmefördelningen på plattan vid jämvikt. Gör nu ett rutnät



och låt $T_1, \dots, T_4$ beteckna temperaturerna i noderna 1, ..., 4. Då gäller approximativt att:

$$T_1 = \frac{10 + 20 + T_2 + T_3}{4} \Leftrightarrow 4T_1 - T_2 - T_3 = 30$$

$$T_2 = \frac{20 + 40 + T_1 + T_4}{4} \Leftrightarrow 4T_2 - T_1 - T_4 = 60$$

$$T_3 = \frac{10 + 30 + T_1 + T_4}{4} \Leftrightarrow 4T_3 - T_1 - T_4 = 40$$

$$T_4 = \frac{30 + 40 + T_2 + T_3}{4} \Leftrightarrow 4T_4 - T_2 - T_3 = 70$$

dvs vi får det linjära ekv.systemet

$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_3 + 0 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 + 0 - T_4 = 60 \\ -T_1 + 0 + 4T_3 - T_4 = 40 \\ 0 - T_2 - T_3 + 4T_4 = 70 \end{cases}$$

Ju finare rutnät, desto fler ekv./obekanta och desto bättre approximation. (Detta funkar även för mer komplexa områden, och även i $\mathbb{R}^3$.)

Matrisekvationen $Ax=b$: (1.4)

Definition: Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dvs A är en $m \times n$ -matris $A = [a_1 \dots a_n]$ där $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, och $x \in \mathbb{R}^n$ så definieras produkten Ax som

$$Ax = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Ax &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Detta ger oss ytterligare ett sätt att beskriva linjära ekv.system på. Vi har tidigare sett att t.ex.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases} \quad (*)$$

kan skrivas som vektorekvationen

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

M.h.a. matris-/vektorprodukten kan vi nu även skriva (*) som matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hur detta perspektiv uppkommer naturligt kommer vi att se nästa vecka.

Här är en "sammmanfattning" av begreppen såhär långt:

Sats: Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Följande påståenden är ekvivalenta

- (i) För alla $b \in \mathbb{R}^m$ har ekv. $Ax = b$ en lösning
- (ii) Varje $b \in \mathbb{R}^m$ kan skrivas som en linjärkombination av A 's kolumner
- (iii) Det linjära höljat av A 's kolumner är $\mathbb{R}^m$
- (iv) A har en pivotposition i varje rad

Trä enkla egenskaper för matris-/vektorprodukten:

Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ så

I. $A(u+v) = Au + Av$

II. $A(cu) = cAu$

Linjärt oberoende: (1.7)

Definition: En mängd vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ sägs vara linjärt oberoende om vektorekvationen

$$x_1 v_1 + \dots + x_p v_p = 0 \quad (*)$$

endast har den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.

Om (*) har fler, icke-triviala, lösningar, sägs vektorerna vara linjärt beroende.

Ex. Är mängden $\{v_1, v_2, v_3\}$ där $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linjärt oberoende?

Lös.: Vill veta om vektorekvationen $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$ har fler än en lösning.

$$\Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{②} - 2 \cdot \text{①} \\ \text{③} - 3 \cdot \text{①}}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} - 2 \cdot \text{②}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} - 4 \cdot \text{②}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Låt } x_3 = t \text{ fri variabel} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}, t \text{ fri variabel}$$

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ är inte linjärt oberoende. T.ex.

$$\text{har vi att } 2v_1 - v_2 + v_3 = \mathbf{0}.$$

Varför införa ett sådant begrepp? Jo, för att man vill ha ett begrepp för att beskriva överflödigt information.

Alla punkter i $\mathbb{R}^2$ som kan nås genom att "traska" i riktningarna $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ kan man nå bara med $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (eller $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eller $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$)

$\Rightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ innehåller överflödig information

$\Leftrightarrow$ Vi kan skriva vektorer i F som linjärkombinationer av de andra vektorerna, t.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{Vektorekvationen } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har fler lösningar än den triviala lösningen $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Bonus:

Ex. För vilka värden på $h \in \mathbb{R}$ är vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ och } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \text{ linjärt beroende?}$$

Lös.: Låt $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$. Vill bestämma alla

$h \in \mathbb{R}$ så att $Ax = 0$ har mer än en lösning.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & : & 0 \\ -1 & 7 & 1 & : & 0 \\ 3 & 8 & h & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\textcircled{1} \textcircled{-3} \\ \leftarrow \textcircled{1}}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 23 & h-3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 23 & h-3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{-23}} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h-26 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (h-26)x_3 = 0$$

Om $h \neq 26$ så $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Om $h = 26$ så x_3 fri variabel

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt beroende då $h = 26$