Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 4.1

Repetition:

- $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} ; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}, n \in \mathbb{N}$

  Tänk inte geometriskt på $\mathbb{R}^n$ då $n > 3$!

- Definition: Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så

  $$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

- Enkla egenskaper: Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ så

  I. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

  II. $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$

- Definition: $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ linjärt oberoende om

  $$x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

  endast har den triviala lösningen $x_1 = \dots = x_p = 0$

  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ linjärt beroende om det existerar icke-triviala lösningar.

Idag: * Linjära avbildningar

Linjära avbildningar: (1.8–1.9)

Nu när vi vet hur man multiplicerar matriser och vektorer, $A\mathbf{x}$, kan vi definiera matrisfunktioner:

Definition: En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (tar in vektor i $\mathbb{R}^n$, spottar ut vektor i $\mathbb{R}^m$) av formen

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. där $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kallas för en matris-avbildning eller matristransformation.

$\mathbb{R}^n$ kallas för T:s definitionsmängd (eng.: domain)
$\mathbb{R}^m$ för dess målmängd (eng.: codomain).

Ex. Låt $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ dvs $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Beräkna $T(\mathbf{u})$ där $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Finns det något $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ s.a. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$?

Lösn.: (a) $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) \\ 2\cdot 3 + (-1)\cdot 5 \\ 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 7 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2+3 \\ 6-5 \\ -2-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

(b) $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 & 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot\tfrac{1}{4} \updownarrow \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{pmatrix} -14 \sim$$

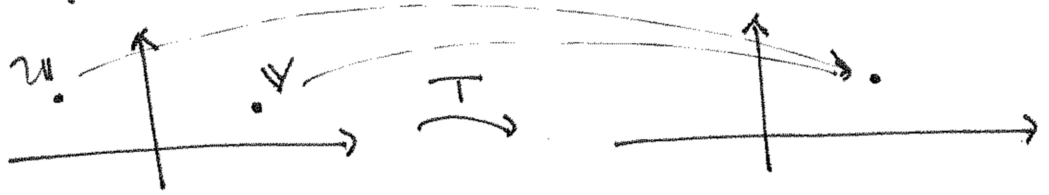
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{array}\right) \Leftrightarrow 0 = -35 \text{ ↯ Går ej!}$$

$\therefore$ Finns inget $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ s.a. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$

Ser alltså att en matrisavbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ inte alltid "spottar ut" hela målmängden.

Definition: Mängden av alla vektorer en avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ spottar ut, kallas för T:s värdemängd (eng.: range). Om T är s.a. T:s målmängd = T:s värdemängd, så säger vi att T är surjektiv (eng.: onto).

Det kan också hända att två olika vektorer $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ avbildas på samma vektor $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$.



Definition: En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a. $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ medför $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. sägs vara injektiv (eng.: one-to-one)

Ex. Låt T vara en matrisavbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Är T injektiv, surjektiv, både och?

Lösn.: Ser att $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

(i) T surjektiv om det finns ett $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ s.a. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$\Longleftrightarrow$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & b_3 \end{array}\right)$$

Kommer alltid att vara lösbart då A har en pivot-position i varje rad

$\therefore$ T är surjektiv

(ii) T injektiv om $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow T(\mathbf{x}_1) \neq T(\mathbf{x}_2)$ för alla $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^4$.

Om $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ så $T(\mathbf{0}) = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

Finns det något $\mathbb{x}_2 \in \mathbb{R}^4$ s.a. $T(\mathbb{x}_2) = \mathbb{0} \Leftrightarrow A\mathbb{x}_2 = \mathbb{0}$?

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ Det kommer att finnas ∞-många lösningar

Detta då vi inte har en pivotposition i varje kolumn, dvs A:s kolumner innehåller överflödig information, dvs A:s kolumner är linjärt beroende.

$\therefore$ T är <u>inte</u> injektiv

<u>Sats</u>: För en matrisavbildning $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$
$A = [\mathbb{a}_1 \dots \mathbb{a}_n]$ gäller att:

(i) T surjektiv $\Leftrightarrow$ $\text{Span}\{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n\} = \mathbb{R}^m$

(ii) T injektiv $\Leftrightarrow$ $\{\mathbb{a}_1, \dots, \mathbb{a}_n\}$ linjärt oberoende

Enkla egenskaper: Om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en matris-transformation så gäller att:

I. $T(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = A(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = A\mathbb{u} + A\mathbb{v} = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$, $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$

II. $T(c\mathbb{u}) = A(c\mathbb{u}) = cA\mathbb{u} = cT(\mathbb{u})$, $c \in \mathbb{R}$

Funktioner som har dessa två egenskaper ~~ska~~ är extremt centrala i linjär algebra.

<u>Definition</u>: En funktion $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs vara en <u>linjär avbildning</u> (eng.: linear mapping/transformation) om

(i) $T(\mathbb{u}+\mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$ för alla $\mathbb{u}, \mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $T(c\mathbb{u}) = cT(\mathbb{u})$ för alla $c \in \mathbb{R}$

Ex. Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är en matristransf. så är T en linjär avbildning.

Varför är linjära avbildningar så centrala?

Motivering:

1D: I envariabelsanalys är man intresserad av att studera funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ← svårt!

Om f är deriverbar så kan man överföra (en del av) studiet av f på studiet av dess tangenter ← Betydligt lättare!

Flervar.: I flervariabelsanalys är man intresserad av ~~[illegible]~~ att studera funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ← svårt!

Det visar sig att man kan definiera derivata för $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ på ett sådant sätt att (en del av) studiet av f kan överföras på studiet av linjära avbildningar associerade till f. ← Betydligt lättare!

Precis som räta linjer i 1D, är linjära avbildningar mycket intressanta i sig.

Linjära avbildningar är den "enklaste sortens" flervar. funktioner då det räcker att veta vad $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ är för att ha fullständig kännedom om T.

Ex. Antag att $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär och att $T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T(\mathbb{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beräkna $T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Lösn.</u>: $T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = T(5 \cdot \mathbb{e}_1 + 2 \cdot \mathbb{e}_2) \overset{(i)}{=} T(5 \cdot \mathbb{e}_1) + T(2 \cdot \mathbb{e}_2) \overset{(ii)}{=}$

$$= 5 \cdot T(\mathbb{e}_1) + 2 \cdot T(\mathbb{e}_2) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Mer generellt har vi att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ä linjär och $\mathbb{v} \in \mathbb{R}^n$ så

$$T(\mathbb{v}) = T\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T(v_1 \mathbb{e}_1 + v_2 \mathbb{e}_2 + \ldots + v_n \mathbb{e}_n) = \{(i) + (ii)\} =$$

$$= v_1 T(\mathbb{e}_1) + v_2 T(\mathbb{e}_2) + \ldots + v_n T(\mathbb{e}_n) = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\mathbb{e}_1) \ldots T(\mathbb{e}_n) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\mathbb{v}}$$

$\Rightarrow$ Studiet av linjära avbildningar kan överföras på studiet av matriser $\leftarrow$ Betydligt lättare!

Vi har just bevisat följande:

<u>Sats</u>: Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då gäller att

$$T(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$$

för en matris $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ som ges av

$$A = [T(\mathbb{e}_1)\ T(\mathbb{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbb{e}_n)].$$

A kallas för <u>standardmatrisen</u> för den linjära avbildningen T.

$\therefore$ $\boxed{\text{Linjära avbildningar}}$

$$\Longleftrightarrow$$

$\boxed{\text{Matristransformationer}}$