Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 4.2

Repetition:

- <u>Definition</u>: En funktion $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ s.a. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kallas för en <u>matristransformation</u>.

- <u>Definition</u>: Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

  1. $\mathbb{R}^n$ = T:s <u>definitionsmängd</u> (skrivs ofta D_T)
  2. $\mathbb{R}^m$ = T:s <u>målmängd</u>
  3. $V_T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m ; T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$ för något $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} =$
     $=$ T:s <u>värdemängd</u>
  4. T <u>surjektiv</u> om $V_T = \mathbb{R}^m$
  5. T <u>injektiv</u> om $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \Rightarrow T(\mathbf{x}_1) \neq T(\mathbf{x}_2)$ för alla $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$.

- <u>Sats</u>: Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n]\mathbf{x}$, så

  I. T surjektiv $\Leftrightarrow$ $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$

  II. T injektiv $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ linjärt oberoende

- <u>Definition</u>: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>linjär</u> <u>avbildning</u> om

  (i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ $\quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

  (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ $\quad c \in \mathbb{R}$

- <u>Sats</u>: Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär avbildning så

  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där $A = [T(\mathbf{e}_1) \ldots T(\mathbf{e}_n)]$ ← standardmatrisen för T

Idag:

* Exempel på linjära avbildningar
* Grundläggande matrisoperationer

Exempel på linjära avbildningar: (1.9)

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Bestäm standardmatrisen för T.

Lösn.: T linjär då $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ och $T(c\mathbf{u}) = c\mathbf{u} = cT(\mathbf{u})$.

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ där } A = [T(\mathbf{e}_1) \dots T(\mathbf{e}_n)] = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n]$$

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

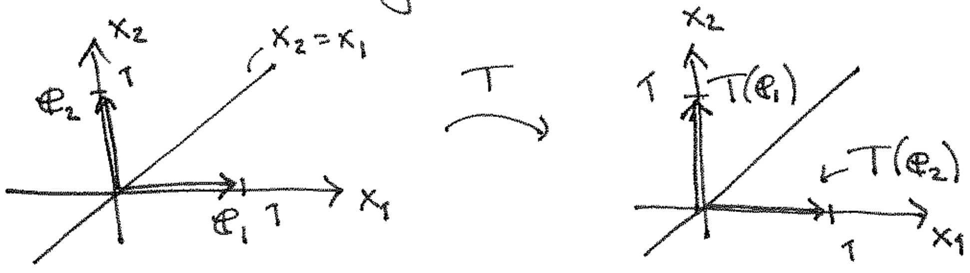
Matrisen $[\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n]$ kallas för identitetsmatrisen och brukar betecknas I (ibland I_n).

3 viktiga klasser av linjära avbildningar (+ 2 bonus)

I. Speglingar:

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som speglar punkter genom linjen $x_2 = x_1$. Bestäm standardmatrisen för T.

Lösn.:



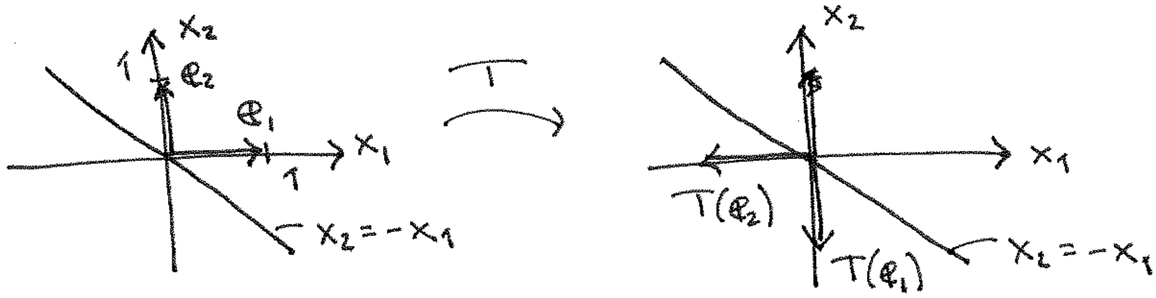
T linjär $\Rightarrow T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där $A = [T(\mathbf{e}_1) \; T(\mathbf{e}_2)]$

Ser att: $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \; T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som speglar punkter genom linjen $x_2 = -x_1$. Bestäm standardmatrisen för T.

Lösn.:



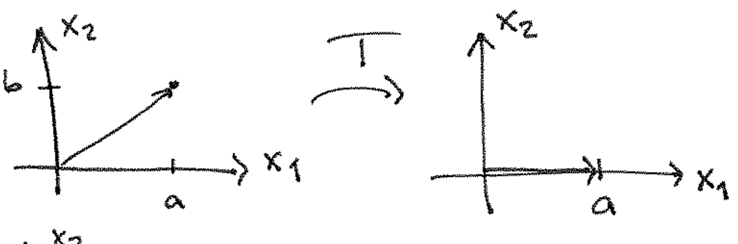
Ser att: $T(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$T(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \; T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

II. Projektioner: Två hurudfall i Lay

1.

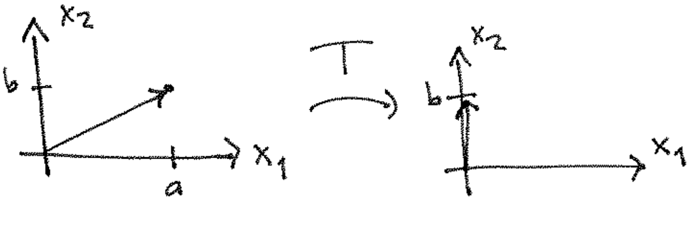


$\Rightarrow T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$

$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$

dvs $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.



$\Rightarrow T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$

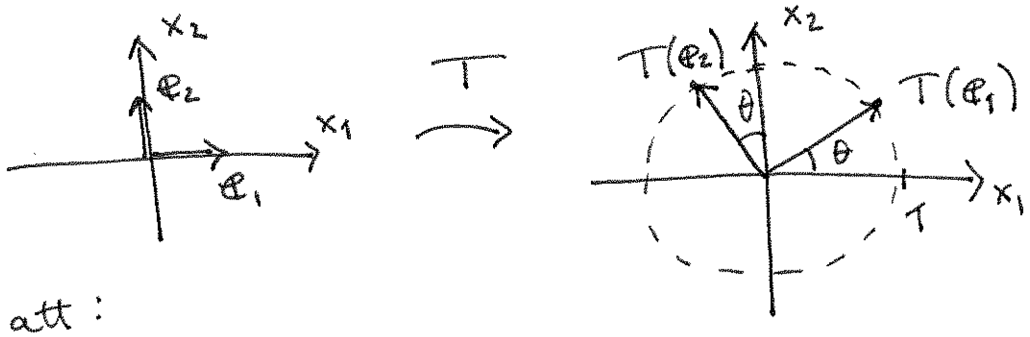
$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$

dvs $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

III. Rotationer:

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som svarar mot en rotation på θ radianer moturs kring origo. Bestäm standardmatrisen för T.

Lösn.:



Ser att:

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

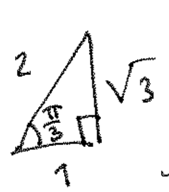
$$\therefore \; T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Ex. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som svarar mot en $\frac{\pi}{3}$-radianers rotation kring origo, medurs.

Lösn.: $\frac{\pi}{3}$ medurs $\iff -\frac{\pi}{3}$ moturs

$$\Rightarrow T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x} =$$

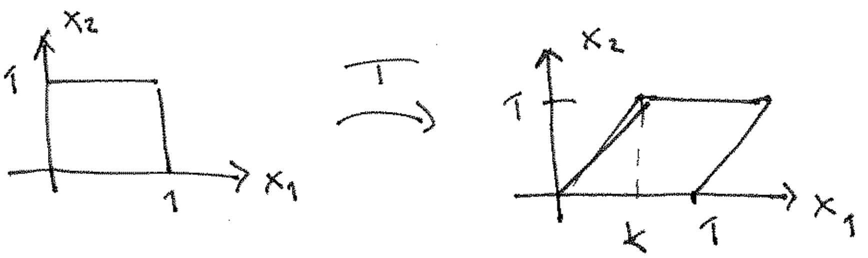
= {



} $= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

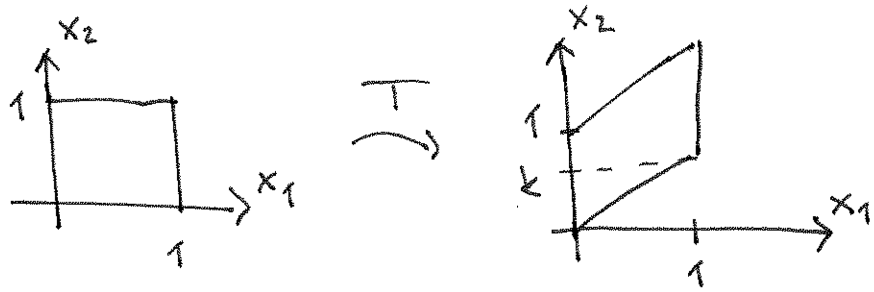
Bonus 1: Skjuvningar (eng.: shear)

Ex.



Ser att: $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

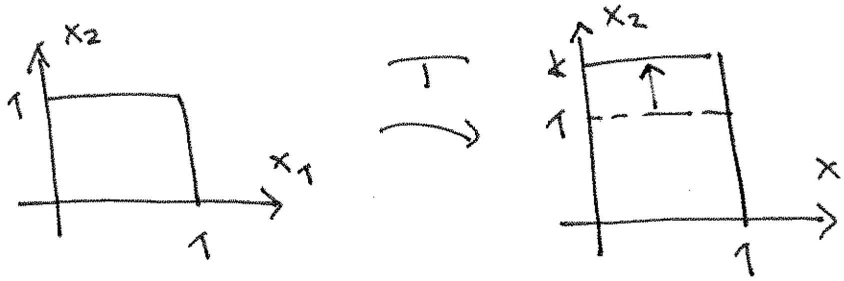
Ex.



Ser att: $T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \Rightarrow T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Bonus 2: Kompression & Utdragning:

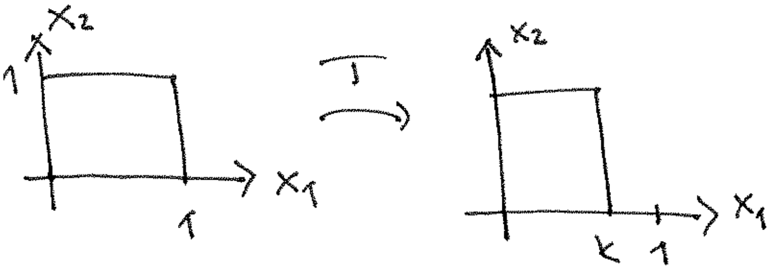
Ex.



$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mathbf{x}$

$k > 0$

Ex.



$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

$k < 0$

Grundläggande matrisoperationer: (2.1)

Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara två linjära avbildningar. Det finns flera sätt att bilda nya funktioner med T och S. Vilka av dessa bevarar linjäritet?

(i) $V = T + S$ ok då

$$V(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (T+S)(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}+\mathbf{v}) =$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) + S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v}) = V(\mathbf{u}) + V(\mathbf{v})$$

$$V(c\mathbf{u}) = T(c\mathbf{u}) + S(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) + cS(\mathbf{u}) = cV(\mathbf{u})$$

På samma sätt kan man visa att

(ii) $V = T - S$ ok!

(iii) $V = k \cdot T$, $k \in \mathbb{R}$ ok!

Medan

skalärprodukt

(iv) $V = T \bullet S$ ej ok!

(v) $V = T \times S$ (om $m = 3$) ej ok!

Vad svarar (i)-(iii) mot på matrisform? Om t.ex.

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

så

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

och motsvarande för $A - B$

(iii) svarar mot $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

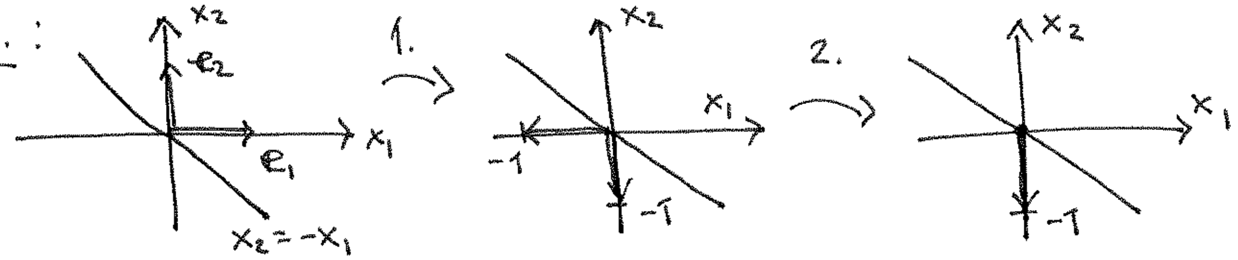
Det finns ytterligare ett sätt att kombinera T och S på, nämligen sammansättningar: $(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Det är inte svårt att visa att om T och S är linjära så är även $S \circ T$ linjär

Ex. Låt T vara den linjära avbildning som först speglar i linjen $x_2 = -x_1$ och därefter projicerar på x_2-axeln. Bestäm standardmatrisen för T.

Lösn.:



$$\Rightarrow \quad T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ så kommer

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x})) = S(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x})$$

I föregående exempel har vi att

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fråga: Finns det något sätt att multiplicera matriser på så att t.ex.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ?}$$

Detta leder till s.k. matrismultiplikation som vi kommer att studera nästa föreläsning.