Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 4.3

Repetition:

- **Definition:** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär avbildning om

  (i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

  (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) \quad c \in \mathbb{R}$

- **Sats:** Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linjär avbildning så $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

  där $A = [T(\mathbf{e}_1) \ldots T(\mathbf{e}_n)]$ ← standardmatrisen för T

- 3+2 klasser av linjära avbildningar:

  I. Speglingar

  II. Projektioner

  III. Rotationer

  B1. Skjuvningar

  B2. Kompressioner & utdragningar

- Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ så

  $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

- Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linjära, så

  $T \circ S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ linjär

Idag:

* Matrismultiplikation
* Matristransponat

Matrismultiplikation: (2.1)

Definition: Om $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ och $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ så definieras <u>matrisprodukten</u> AB som

$$AB = A[\mathbb{b}_1 \dots \mathbb{b}_p] = [A\mathbb{b}_1 \dots A\mathbb{b}_p]$$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 & \mathbb{b}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$

$$A\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbb{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = [A\mathbb{b}_1 \ A\mathbb{b}_2 \ A\mathbb{b}_3] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

<u>Omedelbara egenskaper:</u>

(i) Ser att AB väldefinierat endast om

$$\#\text{kolumner}(A) = \#\text{rader}(B)$$

(ii) $\text{Storlek}(AB) = \#\text{rader}(A) \times \#\text{kolumner}(B)$

<u>Minnesregel:</u> $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B}$ $m\times p$ - matris

väldef. — storlek AB

(iii) $AB \neq BA$ i allmänhet (i exemplet ovan är BA inte ens definierat!)

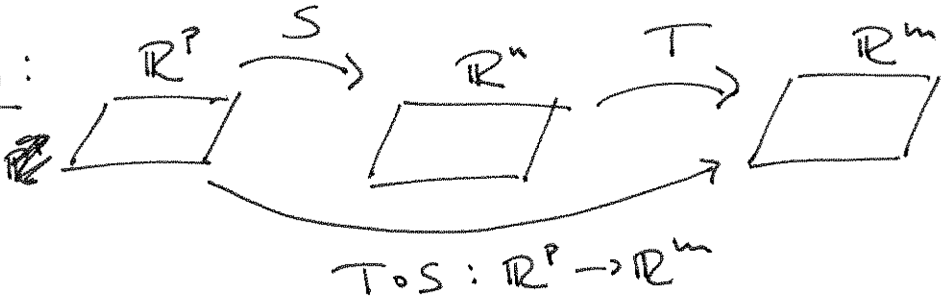
Dessa egenskaper förklaras av att AB är standardmatrisen för sammansättningar. Alltså: Om

$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ dvs $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och

$S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ dvs $S: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ så

$$(T\circ S)(\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} = AB\mathbf{x}$$

<u>(i) & (ii):</u>

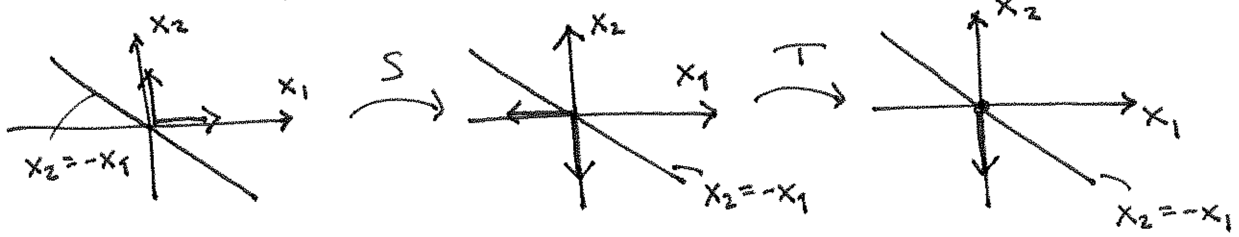


<u>(iii):</u> $T\circ S \neq S\circ T$

<u>Ex</u>. Låt $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i $x_2 = -x_1$ och

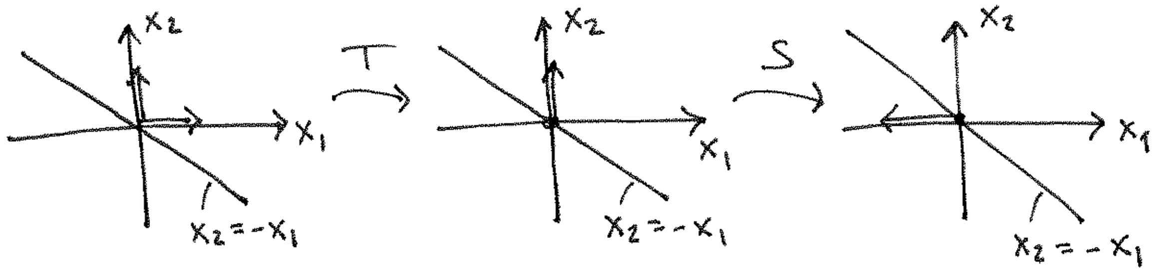
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ projicering på x_2-axeln.

<u>$T\circ S$</u>:



$$\Rightarrow (T\circ S)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

<u>$S\circ T$</u>:



$$\Rightarrow (S\circ T)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

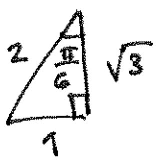
Med hjälp av AB kan vi nu beräkna standardmatrisen för mer involverade avbildningar.

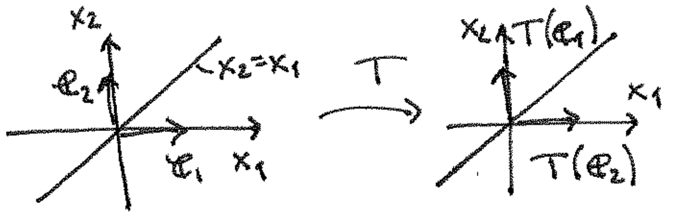
<u>Ex</u>. Bestäm standardmatrisen för den linjära avbildning

som först roterar $\frac{\pi}{6}$ radianer medurs och därefter speglar i linjen $x_2 = x_1$.

Lösn.: Vill beräkna $T \circ S$ där S = rotation $\frac{\pi}{6}$ rad medurs och T = spegling i $x_2 = x_1$.

Vet att: $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & -\sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \mathbf{x} =$

$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \Big\{$  $\Big\} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{B} \mathbf{x} = B\mathbf{x}$



$\Rightarrow T(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{x} = A\mathbf{x}$

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (T \circ S)(\mathbf{x}) = AB\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Jobbigt att beräkna matrisprodukter som det är nu men som tur är finns en liten genväg. Studera t.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(5\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 6\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5\cdot1+7\cdot2 & 6\cdot1+8\cdot2 \\ 5\cdot3+7\cdot4 & 6\cdot3+8\cdot4 \end{pmatrix}$$

Man kan skippa de här två stegen

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \ 2} \\ \boxed{3 \ 4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 8 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1+7\cdot2 & 6\cdot1+8\cdot2 \\ 5\cdot3+7\cdot4 & 6\cdot3+8\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Vi har sett att $AB \neq BA$. I övrigt beter sig AB "normalt"

(i) $A(BC) = (AB)C = ABC$

(ii) $A(B+C) = AB + AC$

(iii) $(A+B)C = AC + BC$

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, $k \in \mathbb{R}$

(v) $I_m A = A = A \cdot I_n$ om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(Kom ihåg: $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$)

Ex. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$IA = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$AI = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

Matristransponat: (2.1)

Definition: Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Transponatet av A skrivs A^T och betecknar den $n \times m$-matris som fås då man byter plats på A:s rader och kolumner.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Sats: För två matriser A, B av lämplig storlek gäller att:

I. $(A^T)^T = A$

II. $(A+B)^T = A^T + B^T$

III. $(kA)^T = kA^T \ , \ k \in \mathbb{R}$

IV. $(AB)^T = B^T A^T$ ← Byter ordning!!

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ Ej definierat!

Däremot: $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (AB)^T$

Anm.: $\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3×1 — kolumnvektor

1×3 — kallas för radvektor