

Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 5.1

Repetition:

• Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ så

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

• Definition: Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ så

$$AB = \underbrace{[AB_1 \dots AB_p]}_{m \times p} \quad m \times p\text{-matris}$$

• $AB \neq BA$ i allmänhet

• Om $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T(x) = Ax$ och $S: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $S(x) = Bx$ linjära, så $T \circ S: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ linjär och

$$T(S(x)) = (AB)x$$

• Om $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ så $I_m A = A = A I_n$ där $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Idag:

* Matristransponat

* Matrisinverser

Matristransponat: (2.1)

Definition: Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Transponatet av A skrivs A^T och betecknar den $n \times m$ -matris som fås då man byter plats på A 's rader och kolumner.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Sats: För två matriser A, B av lämplig storlek gäller att:

I. $(A^T)^T = A$

II. $(A+B)^T = A^T + B^T$

III. $(kA)^T = kA^T, k \in \mathbb{R}$

IV. $(AB)^T = B^T A^T \leftarrow \text{Byter ordning!!}$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (AB)^T$$

Däremot: $A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Ej definierat!

Amm. $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow v^T = [1 \ 2 \ 3]$

3×1
kolumnvektor

1×3

kallas för radvektor

Matrisinverser: (2.2)

Vi har sett att I spelar samma roll som matrismult.
som talet 1 som vanlig multiplikation

För ett tal $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) finns det alltid ett tal $b \in \mathbb{R}$

s.a. $ab=ba=1$, nämligen $b=\frac{1}{a}=a^{-1}$

Samma resonemang för matriser ger:

Definition: Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Om $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är s.a.

$AB=BA=I$ säger vi att B är en (matris-)invers till A , och skriver $B=A^{-1}$.

Existerar alltid A^{-1} , dvs har alla matriser alltid en invers?

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Antag att $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Vill}}{=} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \nexists \text{ Går ej!}$$

$\therefore$ Svar: Nej!

I allmänhet är det svårt att beräkna A^{-1} , givet A .

Det finns dock ett undantag: 2×2 -matriser

Sats: Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Om $ad-bc \neq 0$ så

$$\text{gäller att } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definition: Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ så kallas talet $ad-bc$ för determinanten av A , och skrivs $\det(A)$.

Vi ser alltså att en 2×2 -matris är inverterbar (dvs A^{-1} existerar) om $\det(A) \neq 0$.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 - 6 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existerar

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Test: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ok!}$$

Hur beräknar vi A^{-1} för större matriser?

Hur hade vi gjort om vi inte hade haft formeln för 2×2 -matriser?

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\left(A^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Vi söker en matris $X = [x_1 \ x_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ s.a.

$$AX = [Ax_1 \ Ax_2] = I = [e_1 \ e_2] \quad \text{dvs}$$

$$Ax_1 = e_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftarrow \text{③} - 3 \cdot \text{①}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftarrow \text{①} - \text{②}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Ax_2 = e_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftarrow \text{③} - 3 \cdot \text{①}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftarrow \text{①} - \text{②}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = X = [x_1 \ x_2] = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Trä viktiga observationer:

- (i) Resonemanget / Metoden ovan är ej begränsat till 2×2 -matriser. Vi kan beräkna A^{-1} då $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ på exakt samma sätt.
- (ii) Vi utförde exakt samma radoperationer när vi gaussade $Ax_1 = b_1$ och $Ax_2 = b_2$. Vi kan bespara oss en hel del arbete genom att gaussa alla fallen på en och samma gång.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{③} \leftarrow \text{①} - \text{③}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftarrow \text{①} - \text{②}} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}}$

$\therefore$ Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ställ upp $(A : I)$ och gaussa så att $A \rightarrow I$. Voila!

$$(A : I) \sim \dots \sim (I : A^{-1})$$

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{-1} .

Lös. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{④} \leftarrow \text{①} - \text{④}, \text{⑤} \leftarrow \text{①} + \text{⑤}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{⑥} \leftarrow \text{②} - \text{⑥}} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftarrow \text{①} + \text{③}, \text{②} \leftarrow \text{②} + \text{③}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{①} \leftarrow \text{①} + 2 \cdot \text{②}} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Test: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!

Ex. Lös matrisekvationen $XA - 2X = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lös.: 2 skalär så $2X = X2$

$$XA - 2X = B \Leftrightarrow XA - X2 = B \Leftrightarrow X(A - 2I) = B \\ \Rightarrow X = B(A - 2I)^{-1}$$

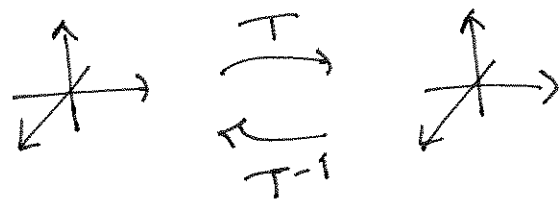
$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = B(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vad är tolkningen av A^{-1} i termer av linjära avbildningar

Antag t.ex. att $T(x) = Ax$ där $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dvs $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$



Då gäller att $T^{-1}(x) = A^{-1}x$ där T^{-1} är inversen till T , dvs

$$(T^{-1} \circ T)(x) = x \quad \text{för alla } x \in D_T$$

$$(T \circ T^{-1})(x) = x \quad \text{för alla } x \in V_T$$

Nästa gång kommer vi att m.h.a. detta (dvs $T^{-1}(x) = A^{-1}x$) kunna relatera existensen av A^{-1} till tidigare begrepp.