Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 5.2

Repetition:

- Definition: Transponatet, A^T, av $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ fås då man byter plats på A:s rader och kolumner.

- $(AB)^T = B^T A^T$

- Definition: Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Om $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.a.

  $AB = BA = I$ så B matrisinvers till A. Skrivs $B = A^{-1}$

- Sats: Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Om $\overset{\det(A)=}{ad-bc} \neq 0$ så

  $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- Givet $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ fås A^{-1} genom att gaussa:

  $$(A \,\vdots\, I) \sim \dots \sim (I \,\vdots\, A^{-1})$$

- Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ där T^{-1} inversen till T, dvs

  $$(T^{-1} \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in D_T = \mathbb{R}^n$$
  $$(T \circ T^{-1})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in V_T$$

Idag:

* Karakterisering av inverterbara matriser
* Determinanter

Men först lite rester från avsnitt 2.~~1~~ 2:

Enkla egenskaper: Om $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverterbara så gäller att

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

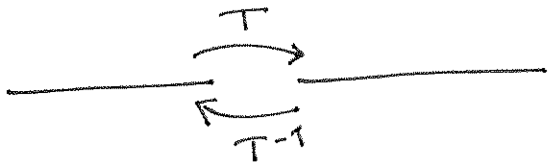
(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ← Omvänd ordning!

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

<u>Karakterisering av inverterbara matriser:</u> (2.3)

Vi har sett att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så är $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ "tvärtom" mot T, dvs T och T^{-1} neutraliserar varandra.

<u>Fråga:</u> Vilka egenskaper måste $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uppfylla för att $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ också ska vara en funktion?



<u>Svar:</u> T måste vara både injektiv och surjektiv

Vi har redan karakteriserat injektivitet och surjektivitet för $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ i termer av A. Låt oss använda detta till att sammanfatta alla matrisbegrepp hittills i följande jättesats:

<u>Sats:</u> (Karakt. av inv.bara matriser) Låt A vara en $n \times n$-matris. Följande påståenden är ekvivalenta:

(a) A är inverterbar

(b) A är radekvivalent med I

(c) A har n stycken pivotpositioner

(d) Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen

(e) A:s kolumner är linjärt oberoende

(f) $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är injektiv

(g) Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

(h) Det linjära höljet av A:s kolumner är $\mathbb{R}^n$

(i) $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv

(j) Det finns en matris $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.a. $CA = I$

(k) Det finns en matris $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.a. $AD = I$

(l) A^T är en inverterbar matris.

Det här ger oss många olika sätt att kolla om en given matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar. Dessvärre är inget av dem lika enkelt som determinanttestet $\det(A) = ad - bc \neq 0$ då $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. För att hitta ett motsvarande test för större matriser måste vi generalisera determinantbegreppet.

Kapitel 3: Determinanter

För $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ definierar vi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \ldots = -24 - 2(-20) = 16$$

Vi beräknade här det(A) genom att expandera längs rad 1. Man kan visa att det inte spelar någon roll längs vilken rad eller kolumn man expanderar.

Ex. (forts.) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{rad } 2\} =$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \ldots + (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot (6 - 10) = 16$$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{kolumn } 3\} =$

$$= 0 \cdot \ldots + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \ldots = (-4)(6 - 10) = 16$$

Determinanter av större, kvadratiska matriser beräknas på samma sätt. (Detta kallas kofaktor-expansion)

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \{\text{rad } 2\} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \{\text{rad } 3\} =$

$$= (-3)\left(2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\right) = (-3)\big(2(-10+8)+5(-4+4)\big) = 12$$

Vi ser att det är relativt enkelt att beräkna determinanter av matriser som innehåller många nollor. Ännu enklare är att beräkna $\det(A)$ då A är en s.k. triangulär matris (dvs har endast nollor över eller under diagonalen)

Ex.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 8\cdot 10 = 400$$

Vi har en mycket användbar metod för att göra om en matris till en triangulär matris, ~~nämligen~~ nämligen Gausselimination. En naturliga fråga blir därför: Vad händer om vi gaussar i en determinant?

Sats: Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(a) Om B fås genom att byta plats på två rader i A, så $\det(B) = -\det(A)$

(b) Om B fås genom att multiplicera en rad i A med en konstant $k \in \mathbb{R}$, så $\det(B) = k\cdot\det(A)$

(c) Om B fås genom att addera en multipel av en rad i A till en annan rad i A, så $\det(B) = \det(A)$

$\underline{\text{Ex}}$. Beräkna det(A) då $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 23 & -5 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$

$\underline{\text{Lösn.}}$: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 23 & -5 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 3 & 6 & 15 & -3 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 23 & -5 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 19 & 4 \\ -2 & -2 & -9 & 2 \\ 3 & 8 & 23 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \quad 2 \quad -3 \end{matrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot(-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{vmatrix} -2 = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & 2 \end{vmatrix} -2 =$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot (-6) = -6 \cdot 7 \cdot 9$$

Antag nu att $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ <u>inte</u> är inverterbar.

Då har inte A en pivotposition i varje rad/kolumn.

Om $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ kommer vi efter att ha gaussat t.ex. få en matris av formen

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs $\det(A) = 0$.

Vi får alltså att A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$. Vi kan bifoga följande till karakteriseringssatsen:

(m) $\det(A) \neq 0$