Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 5.3

Repetition:

- Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ så $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ där T^{-1} inversen till T.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
- $\det(A)$ definieras/beräknas med kofaktorexpansion
- Om A triangulär, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ så

  $\det(A) = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
- Determinanter + Gausselimination

  (i) B = byta plats på två rader i A $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

  (ii) B = multiplicera en rad i A med $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

  $\Rightarrow \det(B) = k\det(A)$

  (iii) B = addera multipel av en rad till en annan i A

  $\Rightarrow \det(B) = \det(A)$

Idag:

* Egenskaper determinanter (forts.)

* Cramers regel

* Geom. tolkning av determinanter

Egenskaper determinanter: (3.2)

Vi har sett hur samspelet mellan det(A) och Gausselimination av A ser ut.

Hur uppför sig determinanter i relation till andra grundläggande matrisoperationer?

Sats: Låt $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

(b) $\det(kA) = k^n \det(A), \quad k \in \mathbb{R}$

(c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(d) $\det(A^T) = \det(A)$

Bevis av (a): Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Då gäller att $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ så

$\det(A+B) = \det I = 1$, men

$\det(A) + \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$ $\blacksquare$

Ex. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Avgör om A^{-1} existerar och beräkna $\det(A^{-1})$ om så är fallet.

Lösn.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \; -1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{2}{7} \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$\det(A) = 7 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existerar

Vet att: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) \overset{T}{=} \det(I) \overset{(c)}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{(c)}{\Longleftrightarrow} \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{7}$

Det faktum att $\det(A^T) = \det(A)$ kombinerat med att om B bildas genom att man byter plats på två rader i A så $\det(B) = -\det(A)$, ger:

(iv) Om C bildas genom att man byter plats på två kolumner i A, så $\det(C) = -\det(A)$.

<u>Ex.</u> Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna $\det(A)$.

<u>Lösn.</u>: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 6 & -3 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8$

<u>Cramers regel</u>: (3.3)

<u>Definition</u>: Om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ så betecknar $A_j(\mathbb{b})$ den matris som fås då kolumn nr. j i A ersätts med $\mathbb{b}$

$$A_j(\mathbb{b}) = [\mathbb{a}_1 \ \ldots \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kolumn nr. } j}}{\mathbb{b}} \ \ldots \ \mathbb{a}_n]$$

<u>Sats</u>: (Cramers regel) Antag att $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ är inverterbar och låt $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$. Då har lösningsvektorn $\mathbb{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ till matrisekvationen $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ elementen/komponenterna

$$x_j = \frac{\det(A_j(\mathbb{b}))}{\det(A)} \qquad j = 1, \ldots, n$$

<u>Bevis</u>: $I = [\mathbb{e}_1 \ldots \mathbb{e}_n] \Rightarrow I_j(\mathbb{x}) = \begin{array}{c} \text{kolumn } j \\ \downarrow \\ [\mathbb{e}_1 \ldots \mathbb{x} \ldots \mathbb{e}_n] \end{array}$

Om $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ så

$$A \cdot I_j(\mathbb{x}) = A[\mathbb{e}_1 \ldots \mathbb{x} \ldots \mathbb{e}_n] = [A\mathbb{e}_1 \ldots A\mathbb{x} \ldots A\mathbb{e}_n] =$$

$$= [\mathbb{a}_1 \ldots \mathbb{b} \ldots \mathbb{a}_n] = A_j(\mathbb{b})$$

dvs $A \cdot I_j(\mathbb{x}) = A_j(\mathbb{b}) \Rightarrow \det(A I_j(\mathbb{x})) = \det(A_j(\mathbb{b}))$

$$\Leftrightarrow \det(A) \cdot \underbrace{\det(I_j(\mathbb{x}))}_{= x_j} = \det(A_j(\mathbb{b}))$$

$$\therefore x_j = \frac{\det(A_j(\mathbb{b}))}{\det(A)} \qquad \blacksquare$$

Cramers regel är framförallt användbar som ett teoretiskt verktyg, men det finns även en del "praktiska tillämpningar".

<u>Ex</u>. Undersök för vilka värden på $s \in \mathbb{R}$ som ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3sx_1 - 2x_2 = 4 \\ -6x_1 + sx_2 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

har en unik lösning och beräkna dessa lösningar.

<u>Lösn.</u>: $(*) \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A = \begin{pmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{pmatrix}$. $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_1(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix} \ . \ A_2(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3s^2 - 12 = 3(s^2-4) = 3(s-2)(s+2)$$

Ekvationssystemet har en unik lösning då $\det(A) \neq 0$

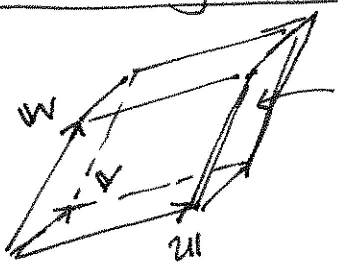
dvs då $s \neq \pm 2$.

För dessa s ger Cramers regel:

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{4s+2}{3(s-2)(s+2)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{3s+24}{3(s-2)(s+2)} = \frac{s+8}{(s-2)(s+2)}$$

<u>Geom. tolkning av determinanter</u>: (3.3)



Parallellepiped

Volym = Area · höjd

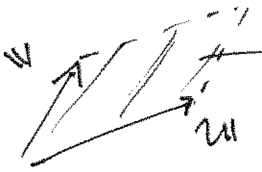
<u>Sats</u>: Låt $A = \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \hspace{-1em} \\ \ (\mathbf{u} \ \ \mathbf{v} \ \ \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ och låt P vara den parallellepiped som spänns upp av A:s kolumner.

Då gäller att:

$$\text{Volym}(P) = |\det(A)|$$

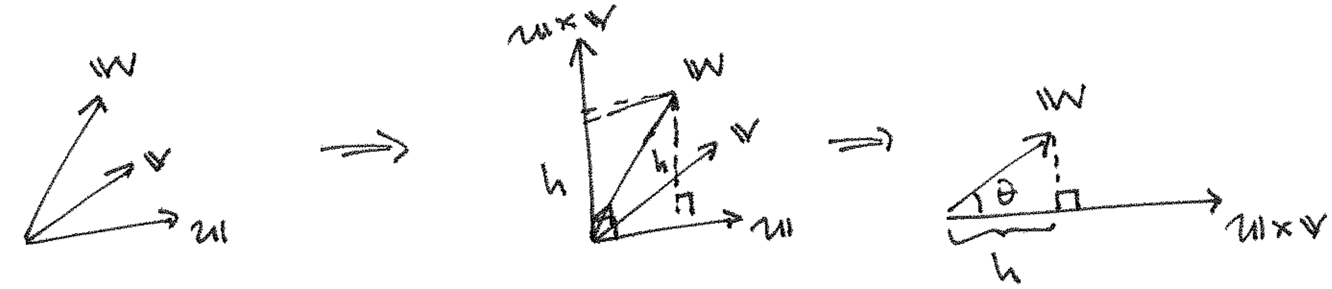
<u>Bevis</u>:

Vet att:



Area $= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$

$$\Rightarrow \text{Volym}(P) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \cdot \text{höjd}$$



Om θ känd så $h = |\mathbf{w}|\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Volym}(P) = |\mathbf{u}\times\mathbf{v}|\cdot\text{höjd} = |\mathbf{w}||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|\cos\theta$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta \text{ vinkeln mellan } \mathbf{w} \text{ och } \mathbf{u}\times\mathbf{v} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Volym}(P) = |\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|$$ ← belopp då volym ≥ 0

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -(u_1v_3 - u_3v_1) \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

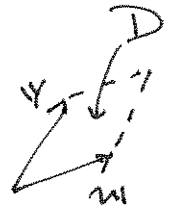
$$\Rightarrow \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

Å andra sidan:

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) - w_2(u_1v_3 - u_3v_1) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\therefore |\det(A)| = |\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})| = \text{Volym}(P) \quad ■$$



M.h.a. detta är det inte svårt att visa:

<u>Sats</u>: Låt $A = (\mathbf{u}\ \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och låt D vara den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Då

$$\text{Area}(D) = |\det(A)|$$