Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 6.T

Repetition:

- **Sats:** $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

  (a) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

  (b) $\det(kA) = k^n \det(A) \quad k \in \mathbb{R}$

  (c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

  (d) $\det(A^T) = \det(A)$

- **Definition:** Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ så

$$A_j(\mathbb{b}) = [\mathbb{a}_1 \dots \mathbb{b} \dots \mathbb{a}_n]$$ kolumn nr. j

- **Sats:** (Cramers regel) Om $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverterbar, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$ så gäller för lösningen $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n)$ till $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ att

$$x_j = \frac{\det(A_j(\mathbb{b}))}{\det(A)}$$

- **Sats:** (i) Om $A = (\mathbb{u}\ \mathbb{v}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ och D är den parallellogram som spänns upp av $\mathbb{u}$ och $\mathbb{v}$ så

$$\text{Area}(D) = |\det(A)|$$

  (ii) Om $A = (\mathbb{u}\ \mathbb{v}\ \mathbb{w}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ och P är den parallell-epiped som spänns upp av $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ och $\mathbb{w}$ så

$$\text{Volym}(P) = |\det(A)|$$

Idag:

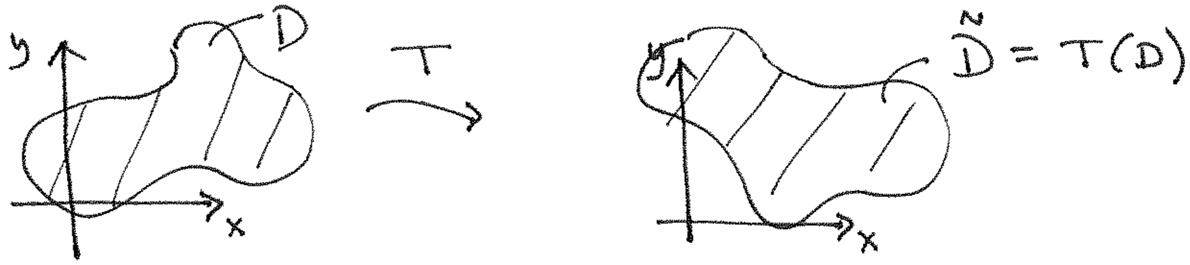
* Determinanter & linjära avbildningar
* Minstakvadratmetoden

Determinanter och linjära avbildningar: (3.3)

Vi har följande samband mellan determinanter och linjära avbildningar:

Sats: (i) Antag att $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linjär, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

D begränsat område i $\mathbb{R}^2$, $\tilde{D}$ bilden av D under T, dvs $\tilde{D} = T(D)$

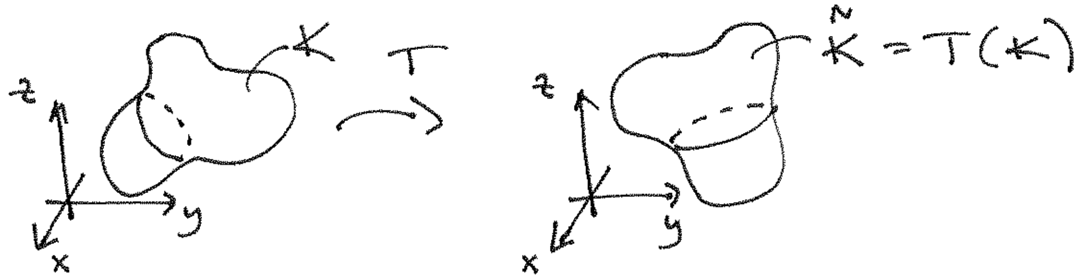


Då gäller att:

$$\text{Area}(\tilde{D}) = |\det(A)|\, \text{Area}(D)$$

(ii) Antag att $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linjär, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

K begränsat område i $\mathbb{R}^3$, $\tilde{K}$ bilden av K under T, dvs $\tilde{K} = T(K)$

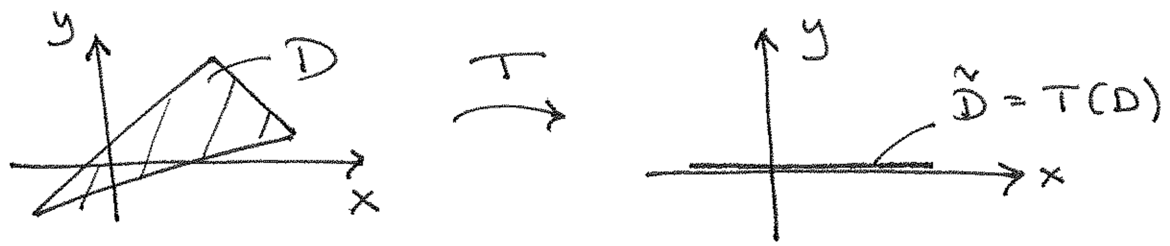


Då gäller att:

$$\text{Volym}(\tilde{K}) = |\det(A)|\, \text{Volym}(K)$$

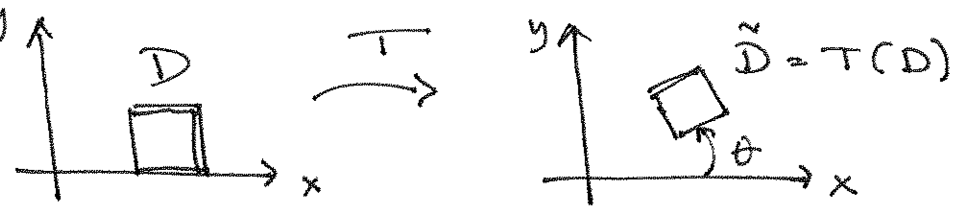
Ex. Antag att $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är projektion på x-axeln

dvs $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow \text{Area}(\tilde{D}) = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right| \text{Area}(D) = 0$ ok!

Ex. Antag att $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är rotation θ rad moturs dvs $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

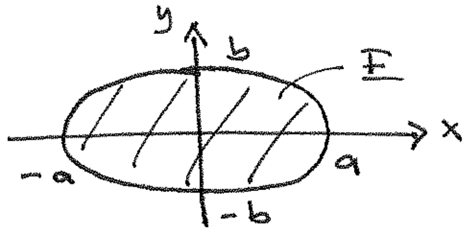


$\Rightarrow \text{Area}(\tilde{D}) = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right| \text{Area}(D) =$

$= |\cos^2\theta + \sin^2\theta| \text{Area}(D) = \text{Area}(D)$ ok!

Ex. Låt $a, b > 0$. Beräkna arean av ellipsskivan

$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (*)$



Lösn.: Låt D = enhetscirkelskivan

Påst.: $E = T(D)$ där $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Bevis: Om $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D$ så $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$

$T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ bu_2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} E$

dvs uppfyller (au_1, bu_2) $(*)$?

Vi kollar: $\frac{(au_1)^2}{a^2} + \frac{(bu_2)^2}{b^2} = u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ Ja!

$\therefore$ Om $u \in D$ så $T(u) \in E$ dvs $T(D) = E$ ∎

$$\Rightarrow \text{Area}(E) = \left|\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right| \text{Area}(D) = |ab| \cdot \pi \cdot 1^2 =$$

$$= \{a, b > 0\} = \pi ab.$$

Minsta kvadratmetoden: (6.5)

Definition: Ett ~~.....~~ ekvationssystem som innehåller fler ekvationer än obekanta kallas för ett överbestämt ekvationssystem.

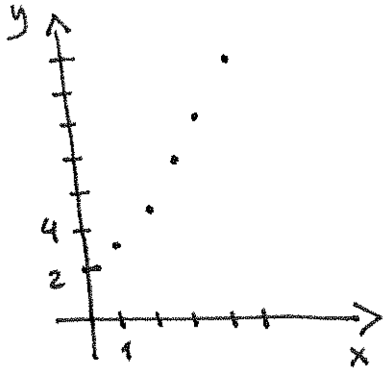
Ex. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ 3 ekvationer, 2 obekanta

Överbestämda ekv.system saknar nästan alltid lösning, så varför studera dem? Jo därför att de väldigt ofta dyker upp i tillämpningar.

Ex. Antag att vi utför några experiment i något labb och får följande mätdata:

x	1	2	3	4	5
y	3	5	8	10	13

Antag vidare att vi vet att $y = kx + m$ och att poängen med labben är att vi ska använda vår mätdata till att bestämma k och m.



$$\begin{cases} 3 = k + m \\ 5 = 2k + m \\ 8 = 3k + m \\ 10 = 4k + m \\ 13 = 5k + m \end{cases}$$

Det är uppenbart, både grafiskt och algebraiskt, att det inte finns en exakt lösning på detta problem. Men m.h.a. linjär algebra går det att hitta en optimal approximativ lösning.

Vill hitta $\mathbb{x}$ s.a. $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ ← överbestämt ekv. system

Studera $A\mathbb{x} - \mathbb{b}$. Detta är felet för ett givet $\mathbb{x}$.

<u>Optimal approximativ lösn.</u>: Hitta det $\mathbb{x}$ för vilket $|A\mathbb{x} - \mathbb{b}|$ är minimalt

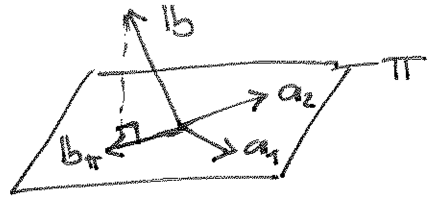
En sådan optimal lösn. kallas för en <u>minsta</u> <u>kvadratlösning</u>.

Vi studerar fallet 3 ekv. 2 obekanta, dvs $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$. $A = (\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2)$ 3x2-matris. $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{x} \in \mathbb{R}^2$

$A\mathbb{x} = (\mathbb{a}_1\ \mathbb{a}_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\mathbb{a}_1 + x_2\mathbb{a}_2$ ← linjärkomb. av $\mathbb{a}_1$ & $\mathbb{a}_2$

Alla tänkbara linjärkomb. av $\mathbb{a}_1$ och $\mathbb{a}_2$ bildar ett plan π i $\mathbb{R}^3$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar exakt $\iff$ $\mathbf{b} \in \pi$



Antag att $\mathbf{b} \notin \pi$ och låt $\mathbf{b}_\pi$ vara projektionen av $\mathbf{b}$ på π.

$\mathbf{b}_\pi$ är den vektor i π som ligger närmast $\mathbf{b}$

$$\iff$$

$$|\mathbf{b}_\pi - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbf{b}_\pi \in \pi$ så det finns något $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ s.a. $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_\pi$

$$\Rightarrow |A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

$\therefore$ $\mathbf{x}_0$ är den vektor vi söker efter

Hur hittar vi $\mathbf{x}_0$? Ser att $\mathbf{b}_\pi - \mathbf{b} = A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}$ är en normal till π

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0 \\ \mathbf{a}_2 \cdot (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{a}_1^T (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0 \\ \mathbf{a}_2^T (A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Kan visa att $(*) \iff A^T(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \iff$

$$\iff A^T A \mathbf{x}_0 = A^T \mathbf{b}$$

$\therefore$ Det $\mathbf{x}_0$ som minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ är en lösn. till ekv. $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$

Vi har troliggjort

<u>Sats</u>: Antag att vi har ett överbestämt ekv. system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ blir minimal om $\mathbf{x}$ löser ekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$