Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 6.2

Repetition:

- Sats: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. D begränsat område i $\mathbb{R}^2$
  $\tilde{D} = T(D)$
  $\Rightarrow \text{Area}(\tilde{D}) = |\det(A)|\,\text{Area}(D)$

  Motsvarande för kroppar i $\mathbb{R}^3$

- Definition: Ett ekv.system med fler ekvationer än obekanta kallas för ett överbestämt ekv.system.

- Definition: Om $A\mathbf{x} = \mathbb{b}$ överbestämt ekv.system så $\mathbf{x}$ minsta kvadratlösning om $|A\mathbf{x} - \mathbb{b}|$ minimal.

- Sats: $\mathbf{x}$ minsta kvadratlösn. till $A\mathbf{x} = \mathbb{b}$ om $\mathbf{x}$ löser ekv.
$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbb{b}$$

Idag:

* Ex. på minsta kvadrat
* Repetition

Ex. på minsta kvadrat: (6.6)

Ex. Vid ett experiment samlas följande mätdata in: $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, 4)$ och $(3, 5)$. Använd minsta kvadratmetoden för att hitta den räta linje som bäst ansluter till dessa mätpunkter.

Lösn.: Vi söker $y = kx + m$, $k, m \in \mathbb{R}$ "s.a."

$$\begin{cases} -k + m = 2 \\ 0 \cdot k + m = 3 \\ 2k + m = 4 \\ 3k + m = 5 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}}_{\mathbb{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbb{b}}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T \mathbb{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T A \mathbb{x} = A^T \mathbb{b} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 14 & 4 & 21 \\ 4 & 4 & 14 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot \tfrac{1}{2} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 14 & 4 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-7) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 0 & -10 & -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 5 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 10 & 35 \\ 0 & -10 & -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 \\ 0 & -10 & -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \tfrac{1}{10} \\ \cdot -\tfrac{1}{10} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 28/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{x} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

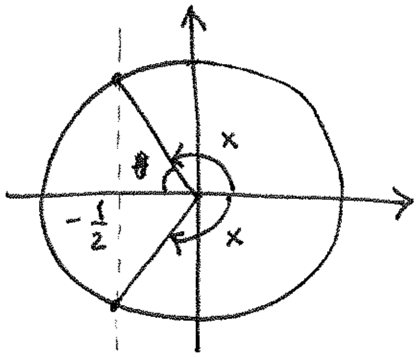
$$\therefore \; y = 0.7x + 2.8$$

Vi är nu klara med ~~alla~~ allt material som ingår i kursen. Fr.o.m. nu börjar vi repetera med utgångspunkt från gamla tentauppgifter.

Ex. (G) Bestäm alla x s.a. $2\cos(x) + 1 = 0$ (4p)

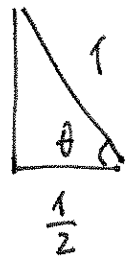
Lösn.: $2\cos(x) + 1 = 0 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1/2}{1}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$



$$\Rightarrow x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi \cdot n =$$

$$= \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$$



Ex. (ÖB) Bestäm alla $t \in \mathbb{R}$ s.a. (4p)

$$\cos(2t) + 5\cos(t) + 3 = 0$$

Lösn.: $\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t =$

$$= \{\cos^2 t + \sin^2 t = 1\} = 2\cos^2 t - 1$$

$$\Rightarrow \cos(2t) + 5\cos(t) + 3 = 2\cos^2(t) - 1 + 5\cos(t) + 3 =$$

$$= 2\cos^2(t) + 5\cos(t) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(t) + \frac{5}{2}\cos(t) + 1 = 0 \quad (*)$$

Låt $x = \cos(t)$. Då $(*) \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{array}$$

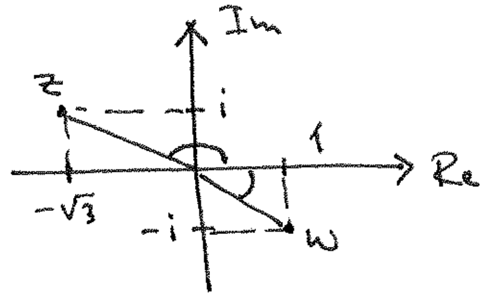
$x_1 = -1/2$: $x = \cos(t) \Rightarrow \cos(t) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{\text{se föreg. ex.}\} \Rightarrow t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

$x_2 = -2$: $x = \cos(t) \Rightarrow \cos(t) = -2$ ↯ Går ej!

Ex. (G) Förenkla $\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(1-i)^{10}}$ så långt som möjligt (4p)

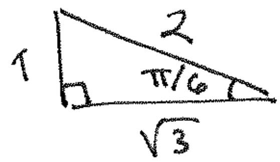
Lösn.: Låt $z=-\sqrt{3}+i$, $w=1-i$



$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$|w| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



$$\arg(w) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(1-i)^{10}} = \frac{z^6}{w^{10}} = \frac{\left(2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right)^6}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{10}} =$$

$$= \{\text{de Moivre}\} = \frac{2^6\left(\cos(5\pi)+i\sin(5\pi)\right)}{2^5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)} =$$

$$= 2\,\frac{\cos(\pi)+i\sin(\pi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cdot\frac{(-1)}{i\cdot 1}\cdot\frac{i}{i} = 2i$$

Ex. (G) (a) Bestäm skärningen mellan planen $x+y+2z=1$ och $2x-y+z=2$ (4p)

(b) Ange det plan som bildar rät vinkel mot bägge planen i (a) samt innehåller punkten $(1,0,0)$.

Lösn.: (a) $\pi_1 : x+y+2z=1 \Rightarrow n_1 = (1,1,2)$

$\Pi_2: 2x - y + z = 2 \Rightarrow \mathbf{n}_2 = (2, -1, 1)$

$\mathbf{n}_1 \not\parallel \mathbf{n}_2 \Rightarrow$ Planen skär varandra längs en linje ℓ

Riktningsvektor:

$$\begin{array}{c} \quad\; + \;\; - \;\; + \\ \mathbf{v} \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 3, -3) \Rightarrow \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbf{v} = (1, 1, -1)$ (längden av $\mathbf{v}$ irrelevant!)

Punkt på ℓ = Punkt som uppfyller

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \quad \text{T.ex. } \mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$$

$\therefore \ \ell : \mathbf{x} = (1, 0, 0) + t(1, 1, -1) \quad t \in \mathbb{R}$

Alternativ lösning:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ -1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{Låt } z = t \text{ fri variabel}$$

$$\therefore \ \ell : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Söker Π_3 s.a. $\Pi_3 \perp \Pi_1$ och $\Pi_3 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{n}_3 \perp \mathbf{n}_1$ och $\mathbf{n}_3 \perp \mathbf{n}_2 \Rightarrow \mathbf{n}_3 \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$

$\Rightarrow \mathbf{n}_3 \overset{(a)}{=} \mathbf{v} = (1,1,-1)$ (längden av $\mathbf{n}_3$ irrelevant)

$\Pi_3 : x + y - z = D$. $(1,0,0) \in \Pi_3 \Rightarrow D = 1$

$$\therefore \Pi_3 : x + y - z = 1$$

Ex. (ÖB) Bestäm avståndet mellan linjerna (4p)

$$l_1 : \begin{cases} x = 4t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{och} \quad l_2 : \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = -3t + 11 \\ z = t \end{cases}$$

Lösn.: $\mathbf{v}_1 = (4,-2,1)$. $\mathbf{v}_2 = (2,-3,1)$

Låt $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \overset{+}{\mathbf{i}} & \overset{-}{\mathbf{j}} & \overset{+}{\mathbf{k}} \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-8)$

$\Rightarrow \Pi : x - 2y - 8z = D$

$(-3,3,0) \in l_1 \Rightarrow$ Om $D = -3 - 6 + 0 = -9$ så innehåller $\Pi_1 : x - 2y - 8z = -9$ linjen l_1

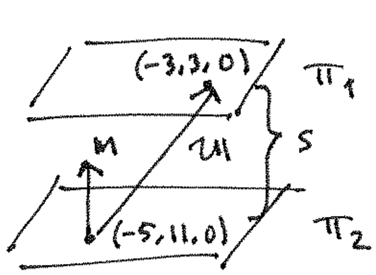
$(-5,11,0) \in l_2 \Rightarrow$ Om $D = -5 - 22 + 0 = -27$ så innehåller $\Pi_2 : x - 2y - 8z = -27$ linjen l_2

Π_1 och Π_2 har samma normal så $\Pi_1 // \Pi_2$

$\Rightarrow$ Minsta avståndet mellan l_1 och l_2 =

= Avståndet mellan Π_1 och Π_2

$$s = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(2,-8,0) \cdot (1,-2,-8)|}{|(1,-2,-8)|} =$$



$$= \frac{|2 + 16 + 0|}{\sqrt{1+4+64}} = \frac{18}{\sqrt{69}} \text{ l.e.}$$