

Algebra, LMA019, ht 2017, Föreläsning 8.1

Ex. (G) Ange för vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ som ekv. systemet

$$\begin{cases} ax + ay - z = a+1 \\ x + (a-1)z = 2 \\ ax + 2z = a+2 \end{cases} \quad (*) \quad (3p)$$

har en entydig lösning.

Lösning: $(*) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -1 & a+1 \\ 1 & 0 & a-1 & 2 \\ a & 0 & 2 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{a=0 \text{ ej ok!}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 2 \\ a & a & -1 & a+1 \\ a & 0 & 2 & a+2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{row operations}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & a & -a^2+a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2-a \end{array} \right)$

Entydig lösning då $-a^2+a+2 \neq 0$

$$-a^2+a+2=0 \Leftrightarrow a^2-a-2=0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow a_1=2, a_2=-1$$

$\therefore$ Unik lösning då $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$

Alternativ lösning: Låt $A = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(*) \text{ unik lösning} \Leftrightarrow A^{-1} \text{ existerar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 1 & 0 & a-1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = -a(2 - a(a-1)) = \\ &= -a(2 - a^2 + a) = a(a^2 - a - 2) \end{aligned}$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a(a^2 - a - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_2 = 2, a_3 = -1$$

$\therefore$ Entydig lösning då $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$

Ex. (G) (a) Definiera vad det innebär att ~~vara~~ en mängd vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende. (2p)

(b) Bestäm konstanten $a \in \mathbb{R}$ så att

(3p)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

blir linjärt oberoende.

Lös.: (a) Definition: En mängd vektorer $\{v_1, \dots, v_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende om vektorekvationen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = 0$$

endast har den triviala lös. $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$.

$$(b) \quad x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array} \right) \leftarrow (a+1)x_3 = 0 \text{ dvs } x_3 = 0 \text{ om } a \neq -1$$

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende om $a \neq -1$

Ex. (G) Bestäm för vilka $h \in \mathbb{R}$ som $u = (-5, 11, h)$

är en linjär kombination av vektorerna (4p)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lös.: Vill bestämma $h \in \mathbb{R}$ s.a. vektorekvationen

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = u \quad (*)$$

är lösbar.

$$(*) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & 0 & 11 \\ 2 & 5 & 8 & h \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{2} \textcircled{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & h+10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix} \leftarrow 0 = h+9 \Leftrightarrow h = -9$$

$\therefore$ linjärkombination av v_1, v_2, v_3 då $h = -9$.

Ex. (OB) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & s \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & s+1 & 3 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ s \end{pmatrix}$ där $s \in \mathbb{R}$.

Bestäm, för varje värde på s , antalet lösningar till systemet $Ax = b$. (4p)

Lös.: $Ax = b \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & s & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & s+1 & 3 & s \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & s+1 & 3 & s \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & s & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} \textcircled{-4} \textcircled{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & s+1 & 3 & s \\ 0 & -4s-3 & -7 & 4-4s \\ 0 & -2s-3 & s-12 & 2-2s \end{pmatrix} \dots \text{blååå!!}$$

Vet att: Unik lösning då $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & s \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & s+1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-5(s+1)) + (12-5) + s(4(s+1)-1) =$$

$$= 2(-2-5s) + 7 + s(4s+3) = 4s^2 - 7s + 3$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow s^2 - \frac{7}{4}s + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} - \frac{3 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \frac{7}{8} \pm \frac{1}{8} \Rightarrow s_1 = 1, s_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ Unik lösning då $s \in \mathbb{R} \setminus \{3/4, 1\}$

$s=1$: $Ax = b \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} \textcircled{-4} \textcircled{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \textcircled{-\frac{5}{7}} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\therefore$ Oändligt många lösningar då $s=1$

$$\underline{s=3/4}: A\mathbf{x}=\mathbf{b} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3/4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 7/4 & 3 & 3/4 \end{array} \right) \cdot 4 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -4 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 12 & 3 \end{array} \right) \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 12 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-2} \textcircled{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \end{array} \right) \textcircled{1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \leftarrow 0 = -1 \nexists$$

$\therefore$ Lösning saknas då $s=3/4$.

Ex. (ÖB) Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med standardmatris Q . Antag att $T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ där $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestäm Q^{-1} (5p)

(b) Låt W vara parallelogrammet med hörnen $(1,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$ och $(6,2)$. Bestäm arean av $T(W)$.

Lös.: (a) Vet att: $T^{-1}(\mathbf{x}) = Q^{-1}\mathbf{x}$ där

$$Q^{-1} = [T^{-1}(\mathbf{e}_1) \quad T^{-1}(\mathbf{e}_2)]$$

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1 \Rightarrow T^{-1}(T(\mathbf{u})) = T^{-1}(\mathbf{e}_1) \Leftrightarrow T^{-1}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}$$

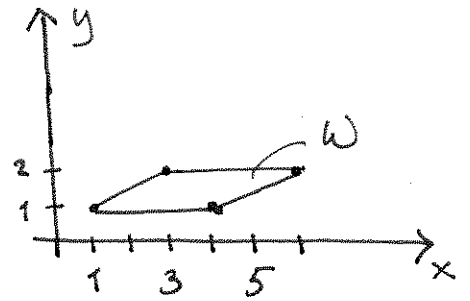
$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{e}_2 \Rightarrow T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{e}_2) \Leftrightarrow T^{-1}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}$$

$$\therefore Q^{-1} = [T^{-1}(\mathbf{e}_1) \quad T^{-1}(\mathbf{e}_2)] = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad T(x) = Q \cdot x \quad \text{där}$$

$$Q = (Q^{-1})^{-1} = \frac{1}{2+6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$



Vet att: $\text{Area}(T(W)) = |\det(Q)| \cdot \text{Area}(W) =$

$$= \left| \frac{1}{32} + \frac{3}{32} \right| \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{8} \text{ a.e.}$$

