

Algebra, LMA019, ht2017, Föreläsning 8.2

Ex. (G) Bestäm inversen till matrisen $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

och lös med hjälp av inversen ekvationen $Mx = b$

där $b = (2, 2, 1)$.

(4p)

Lösning: $(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \\ \cdot -2 \end{array} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \textcircled{-3} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 2 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 16 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{1} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 16 & 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \textcircled{-4} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot -1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -3 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Test: $MM^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ ok!}$

$$Mx = b \Leftrightarrow M^{-1}Mx = M^{-1}b \Leftrightarrow x = M^{-1}b$$

$$x = M^{-1}b = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex. (ÖB) Bestäm matrisen X om $AXB + AX = C$

där $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4p)

$$\underline{\text{Lös.}}: A \cdot X \cdot B + A \cdot X = C \Leftrightarrow A \cdot X \cdot (B + I) = C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} A \cdot X \cdot (B + I) = A^{-1} C \Leftrightarrow X \cdot (B + I) = A^{-1} C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X \cdot (B + I) \cdot (B + I)^{-1} = A^{-1} C \cdot (B + I)^{-1}$$

$$\therefore X = A^{-1} C \cdot (B + I)^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (B + I)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 28 & -16 \\ -22 & 13 \end{pmatrix}$$

Ex. (G) För vilka värden på $s \in \mathbb{R}$ har ekvationssystemet

$$\begin{cases} sx + 3y = 2 \\ 3x + sy = 1 \end{cases} \quad (*)$$

en entydig lösning? Bestäm lösningarna för dessa värden.

$$\underline{\text{Lös.}}: (*) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} s & 3 \\ 3 & s \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_b$$

Unik lösning då $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow s^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow s^2 \neq 9 \Leftrightarrow s \neq \pm 3$$

$\therefore$ Unik lösning då $s \neq \pm 3$

Vi använder Cramers regel till att beräkna lösningarna

$$A_1(b) = [b \ a_{12}] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

$$A_2(b) = [a_{11} \ b] = \begin{pmatrix} s & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cramers regel ger att om $s \neq \pm 3$ så

$$x_1 = \frac{\det(A_1(b))}{\det(A)} = \frac{2s-3}{s^2-9} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+3)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(b))}{\det(A)} = \frac{s-6}{s^2-9} = \frac{s-6}{(s-3)(s+3)}$$

Ex. (ÖB) En linjär avbildning $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avbildar punkterna $(1, 1, -2)$, $(-2, 1, 1)$ och $(0, -2, 1)$ på punkterna $(-4, 1, 3)$, $(2, -5, 3)$ respektive $(3, 2, -5)$.

Bestäm standardmatrisen till F . (4p)

Lös.: Vi vill bestämma

$$A = [F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3)]$$

Låt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vill hitta

$x_1, x_2, \dots, x_9$ s.a.

$$\left. \begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 &= e_1 \Rightarrow (v_1 \ v_2 \ v_3 \mid e_1) \\ x_4 v_1 + x_5 v_2 + x_6 v_3 &= e_2 \Rightarrow (v_1 \ v_2 \ v_3 \mid e_2) \\ x_7 v_1 + x_8 v_2 + x_9 v_3 &= e_3 \Rightarrow (v_1 \ v_2 \ v_3 \mid e_3) \end{aligned} \right\} (*)$$

I så fall gäller t.ex. att

$$F(e_1) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3) = \{F \text{ linjär}\} =$$

$$= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) + x_3 F(v_3)$$

$\nwarrow$ $\uparrow$ $\nearrow$
 kända

Vi kan gaussa alla 3 faller i (*) på en och samma gång, genom att gaussa:

$$(v_1 \ v_2 \ v_3 : e_1 \ e_2 \ e_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{-1} \textcircled{2} \\ \nwarrow \nearrow \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \nwarrow \nearrow \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nwarrow \nearrow \\ \textcircled{2} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \cdot -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nwarrow \nearrow \\ \textcircled{1} \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{3} \\ \cdot \frac{1}{6} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow F(e_1) = F(-v_1 - v_2 - v_3) = -F(v_1) - F(v_2) - F(v_3) =$$

$$= - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2-3 \\ -1+5-2 \\ -3-3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$F(e_2) = F\left(-\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 - v_3\right) = -\frac{2}{3}F(v_1) - \frac{1}{3}F(v_2) - F(v_3) =$$

$$= -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8-2-9 \\ -2+5-6 \\ -6-3+15 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F(e_3) = F\left(-\frac{4}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 - v_3\right) = -\frac{4}{3}F(v_1) - \frac{2}{3}F(v_2) - F(v_3) =$$

$$= -\frac{4}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16-4-9 \\ -4+10-6 \\ -12-6+15 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = [F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$