Intromatte, LMA019, ht2017, Föreläsning 2

<u>Idag</u>: * Polynom & Faktorsatsen
* pq-formeln
* Intervall
* Olikheter

<u>Polynom & Faktorsatsen</u>:

<u>Definition</u>: Med ett <u>polynom</u> menas en funktion av formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

där $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ kallas <u>koefficienter</u>, och $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomets <u>grad</u> är n.

<u>Ex.</u> (i) $p(x) = x^3 + x - 27$ polynom av grad 3

(ii) $p(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{x}$ <u>ej</u> polynom

Det går att dividera med polynom precis som med heltal. Givet två polynom $p(x)$ och $s(x)$, existerar två polynom $q(x)$ och $r(x)$ s.a.

$$\frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)} \quad \left(\Leftrightarrow p(x) = q(x)s(x) + r(x)\right)$$

där grad r < grad s (jämför: $\frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$)

$q(x)$ kallas för <u>kvot</u> och $r(x)$ kallas för <u>rest</u>.

Givet $p(x), s(x)$ får vi fram $q(x), r(x)$ med hjälp av <u>polynomdivision</u>.

<u>Ex.</u> $p(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2, \quad s(x) = x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 2x + 6 \quad \leftarrow \text{kvot} \\
\hline
x^2 + x + 1 & 2x^4 + 6x^2 + 2 \\
 & -(2x^4 + 2x^3 + 2x^2) \\
\cline{2-2}
 & -2x^3 + 4x^2 + 2 \\
 & -(-2x^3 - 2x^2 - 2x) \\
\cline{2-2}
 & 6x^2 + 2x + 2 \\
 & -(6x^2 + 6x + 6) \\
\cline{2-2}
 & -4x - 4 \quad \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \frac{2x^4 + 6x^2 + 2}{x^2 + x + 1} = 2x^2 - 2x + 6 + \frac{-4x - 4}{x^2 + x + 1}$$

<u>Faktorsatsen</u>: Antag att $a \in \mathbb{R}$ är en rot till polynomekvationen $p(x) = 0$, dvs $p(a) = 0$. Då är $x - a$ en faktor i $p(x)$, dvs

$$\frac{p(x)}{x - a} = q(x) \quad (r(x) = 0)$$

för något polynom $q(x)$.

<u>Ex.</u> Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

<u>Lösn.</u>: Gissa en rot: $x_1 = 1$

Polynomdividera med $x - x_1 = x - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4 \\
\hline
x - 1 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\
 & -(x^3 - x^2) \\
\cline{2-2}
 & -4x + 4 \\
 & -(-4x + 4) \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Måste bli 0 enligt faktorsatsen

$$\therefore \frac{x^3-x^2-4x+4}{x-1} = x^2-4 \iff p(x) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

pq-formeln:

Sats: Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ där $p, q \in \mathbb{R}$, har rötterna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Bevis: $x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q =$

$$= x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$$

← Denna metod kallas för kvadratkomplettering

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$x^2+px+q=0 \iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\Rightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\therefore x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \blacksquare$$

Ex. Faktorisera polynomet x^2+7x+6

Lösn.: $x^2+7x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} =$

$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-24}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -6$$

faktorsatsen

$$\Rightarrow x^2+7x+6 = (x-(-1))(x-(-6)) = (x+1)(x+6)$$

Ex. Faktorisera polynomet $p(x) = 1 - 2x - 3x^2$ m.h.a. kvadratkomplettering

Lösn.: $p(x) = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = x^2 + 2\cdot\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1\cdot 3}{3\cdot 3} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -1$$

$$\therefore \quad p(x) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$$

Intervall:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ öppet intervall

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$ slutet intervall

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ halvöppet (ibland halv-

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ slutet) intervall

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} ; x < a\}$ oändliga intervall

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

Symbolen "∞" betecknar oändligheten

Obs! $[-\infty, a]$ eller $(a, \infty]$ etc. är ej intervall då ∞ inte är ett reellt tal, $\pm\infty \notin \mathbb{R}$ ($\pm\infty$ finns ej på tallinjen)

Olikheter:

En olikhet kan betraktas som en ekvation där likhetstecknet är utbytt mot ett olikhetstecken.

Viktig skillnad för olikheter:

Då man multiplicerar eller dividerar en olikhet med ett negativt tal så vänds olikhetstecknet.

Ex. Lös olikheten $-3x+5 \leq 8$

Lösn.: $-3x+5 \leq 8 \iff -3x \leq 3 \iff x \geq -1$

$\therefore \quad x \in [-1, \infty)$

Utom i mycket enkla fall, som t.ex. föregående ex., måste man ofta använda sig av en s.k. teckentabell.

Ex. Lös olikheten $x^2+2x \geq 0$

Lösn.: $x^2+2x \geq 0 \iff x(x+2) \geq 0$

		-2		0	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore \quad x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

Ex. Lös olikheten

$$1 \leq \frac{13}{3(x+6)} + \frac{8}{3(x-3)} \qquad (*)$$

Lösn.: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{8}{3(x-3)} + \dfrac{13}{3(x+6)} - 1 \geqslant 0$

MGN: $3(x-3)(x+6) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{8(x+6) + 13(x-3) - 3\overbrace{(x-3)(x+6)}^{x^2+3x-18}}{3(x-3)(x+6)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x + 48 + 13x - 39 - 3x^2 - 9x + 54}{3(x-3)(x+6)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 12x + 63}{3(x-3)(x+6)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-\cancel{3}(x^2 - 4x - 21)}{\cancel{3}(x-3)(x+6)} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4+21} = 2 \pm 5 \right\}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{(x+3)(x-7)}{(x-3)(x+6)} \leqslant 0$$

Dags för gigantisk tabell!

		-6		-3		3		7	
$x+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-7$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
K	$+$	ej def.	$-$	0	$+$	ej def.	$-$	0	$+$

$\therefore\ x \in (-6, -3] \cup (3, -7]$