Intromatte LMA019, ht2017, Föreläsning 3

Idag: * Absolutbelopp
* Rötter
* Exponenter

Absolutbelopp:

Definition: Absolutbeloppet, $|x|$, av $x \in \mathbb{R}$ definieras som

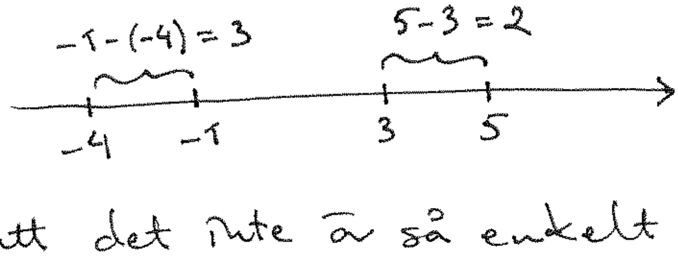
$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Ex. $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

Varför införa ett sådant begrepp?

Svar: För att få en matematisk beteckning för begreppet avstånd.

För två godtyckliga tal/punkter på tallinjen ges avståndet mellan dem av det större talet minus det mindre



Men säg att det inte är så enkelt att avgöra vilket av de två talen som är störst/minst, t.ex. $\pi^{\sqrt{8}}$ och $(\sqrt{11})^e$, eller bara två abstrakta tal $a, b \in \mathbb{R}$

Antag att vi väljer fel då vi ska beräkna avståndet mellan två tal. Vad får vi istället?

$$3-5=-2\ ,\ -4-(-1)=-3$$

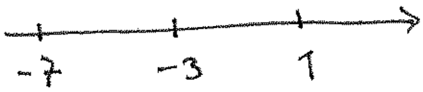
<u>Svar:</u> Vi får det "verkliga" avståndet med ombytt tecken!

Alltså gäller att $|a-b|$ betecknar avståndet mellan talen a och b, oberoende av vilket som är störst/minst

$$|5-3|=|2|=2\ ,\ |3-5|=|-2|=-(-2)=2$$

Uppgiften: "Finn alla tal x sådana att avståndet från x till -3 är 4" formuleras matematiskt som:

<u>Ex.</u> Lös ekvationen $|x+3|=4$ $\left(|x+3|=|x-(-3)|\right)$

<u>Lösn.</u>: 

$\Rightarrow x_1=-7\ ,\ x_2=1$

Geometrisk lösning!

<u>Egenskaper för absolutbelopp</u>

Låt $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$. Då gäller att:

1. $|a|^2=a^2$
2. $|a^n|=|a|^n$
3. $|ab|=|a||b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\ ,\ b\neq 0$

Från den geometriska tolkningen av $|x|$ som $|x-0|$ följer även att:

5. $|x| = a \iff x = \pm a$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$
7. $|x| > a \iff x < -a$ eller $x > a$

Ex. Bestäm alla lösningar till

$$\left|\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right| \leq 2 \qquad (*)$$

Lösn.: $(*) \overset{6.}{\iff} -2 \leq \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \leq 2 \iff$

$$\iff -2-\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2}x \leq 2-\frac{3}{4} \iff -\frac{11}{4} \leq \frac{3}{2}x \leq \frac{5}{4}$$

$$\iff -\frac{11}{4}\cdot\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3} \iff -\frac{11}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}$$

$$\therefore \quad x \in \left[-\frac{11}{6}, \frac{5}{6}\right]$$

Rötter:

Definition: Låt $a \geq 0$. Med kvadratroten ur a, $\sqrt{a} = a^{1/2}$, menas det icke-negativa reella tal, vars kvadrat är a.

Ex. $\sqrt{4} = 2$ inte -2 eller ± 2

Däremot har ekvationen $x^2 = 4$ lösningen $x = \pm 2$

Märkligt? $x^2 = 4 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \iff \sqrt{x^2} = 2$

Påstående: $\sqrt{x^2} \neq x$ för alla $x \in \mathbb{R}$

Bevis/Motex. Antag $x<0$, säg $x=-3$

$$\left.\begin{aligned} HL &= -3 \\ VL &= \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow VL \neq HL \quad \boxed{S}$$

Vi har alltså att:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\therefore \; x^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Två andra mycket vanliga fel: $a, b \geq 0$

(i) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

EJ SANT!

Motex.: $a = 16$, $b = 9$. Räkna ut VL och HL för dessa värden.

Definition: (i) Om $n \in \mathbb{N}$ udda så def. n:te roten ur $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, som det tal som ggr. sig självt n ggr. blir a.

(ii) Om $n \in \mathbb{N}$ jämnt så def. n:te roten ur $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, som det icke-negativa tal som ggr. sig självt n ggr. blir a.

Ex. $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[4]{81} = 3$

Som vi har sett kan man även beskriva rötter m.h.a.:

Exponenter:

Definition: Om $a>0$ så definierar vi

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ faktorer}) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$$

Ex. $4^{-3/2} = \sqrt{4^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{4^3}} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$

Sats: (Exponentiallagarna) Om $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$ så

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (ii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ (iv) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Ex. Förenkla $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$

Lösn.: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} = \sqrt[3]{(a^6)^{1/4}} = \sqrt[3]{(a^2)^{3/4}} = \sqrt[3]{((a^2)^{1/2})^{3/2}} =$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{a^2})^{3/2}} = \sqrt[3]{|a|^{3/2}} = \left(|a|^{3/2}\right)^{1/3} = |a|^{1/2} = \sqrt{|a|}$

Bonus:

Ex. Förenkla $\dfrac{8^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{8}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{8}}}$ $(*)$

Lösn.: $(*) = \dfrac{(2^3)^{\sqrt{2}} \cdot 2^{-\sqrt{4\cdot 2}}}{(2^{1/2})^{\sqrt{4\cdot 2}}} = \dfrac{2^{3\sqrt{2}} \cdot 2^{-2\sqrt{2}}}{2^{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}}} =$

$= \dfrac{2^{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = \dfrac{2^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}}} = 1$

Ex. Bestäm minsta värdet av x^2+4x (derivering ej tillåtet!)

Lösn.: $x^2+4x = x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2 = (x+2)^2-4$

$(x+2)^2$ som minst då $x=-2$

$\Longrightarrow x^2+4x$ — 〃 —

$\therefore$ Minsta värdet av x^2+4x är -4

Ex. Lös ekvationen $3^x = 4-3^{1-x}$

Lösn.: $3^x = 4-3^{1-x} \Longleftrightarrow 3^x = 4-\dfrac{3}{3^x}$

Sätt $t=3^x$: $t = 4-\dfrac{3}{t} \Longleftrightarrow t^2 = 4t-3 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow t^2-4t+3=0 \Longrightarrow t = 2\pm\sqrt{4-3} = 2\pm 1$

$\Longrightarrow t_1 = 3,\ t_2 = 1$

$\therefore 3^{x_1} = 3^1,\ 3^{x_2} = 1 = 3^0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 0$