Intromatte, LMA019, ht2017, Föreläsning 4

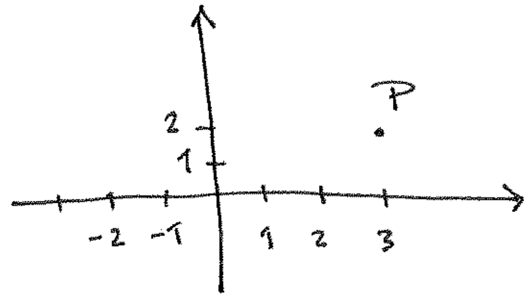
<u>Idag:</u>
* Koordinatsystem
* Avstånd i planet
* Räta linjer
* Cirklar och cirkelskivor

Koordinatsystem:

Med hjälp av koordinatsystem kan vi beskriva punkter i planet, $\mathbb{R}^2$, algebraiskt.

Vi skriver P som

$\underset{\nearrow \atop \text{x-koord.}}{(3,}\ \underset{\nwarrow \atop \text{y-koord.}}{2)}$ (P(3,2) i Stewart)



Detta ger oss ett sätt att algebraiskt beskriva olika geometriska figurer/mängder.

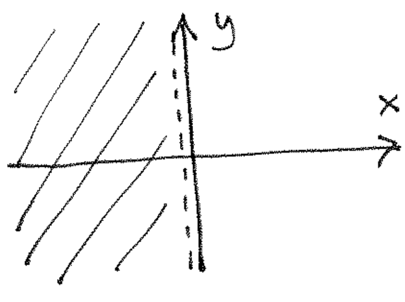
<u>Ex.</u> Rita följande mängder i xy-planet ($\mathbb{R}^2$)

(i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x < 0\}$

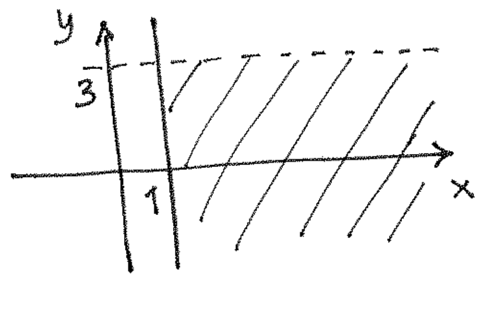
(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ och } y < 3\}$

(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 4 \text{ och } x \leq 2\}$

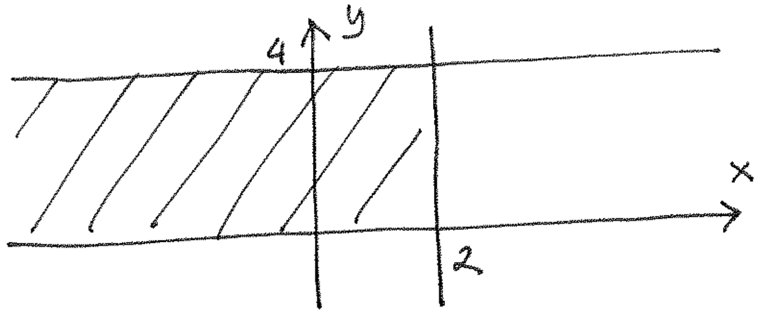
<u>Lösn.</u>: (i)



(ii)



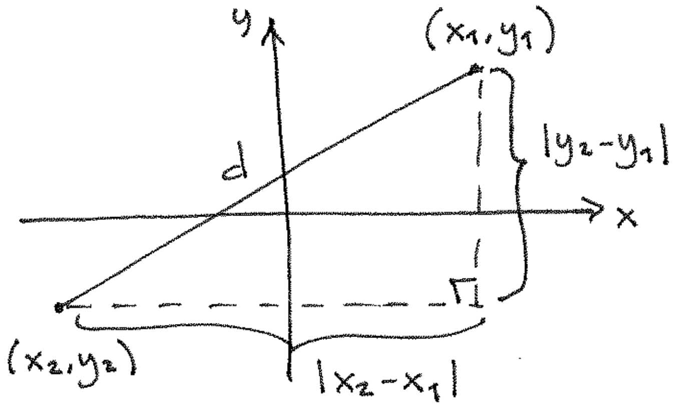
(iii)



Avstånd i $\mathbb{R}^2$:

Om (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är två punkter i planet ges avståndet mellan dem av

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Följer enkelt av Pythagoras sats:

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Avståndet mellan två punkter $A, B \in \mathbb{R}^2$ skrivs $|AB|$ i Stewart.

Ex. Visa att $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ och $C(5, 15)$ ligger på en rät linje genom att visa att

$$|AB| + |BC| = |AC|$$

Lösn.: $|AB| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (11-3)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$

$|BC| = \sqrt{(5-3)^2 + (15-11)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$\Rightarrow |AB| + |BC| = \sqrt{80} + \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 20} + \sqrt{20} = 2\sqrt{20} + \sqrt{20} = 3\sqrt{20}$

$$|AC| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (15-3)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 20} = 3\sqrt{20}$$

$$\therefore |AB| + |BC| = |AC| \quad \blacksquare$$

Räta linjer:

Definition: Grafen till en ekvation är mängden av alla punkter vars koordinater uppfyller ekvationen.

Definition: En rät linje är grafen till en ekvation av formen $y = kx + m$ där $k, m \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Fakta om räta linjer:

- k kallas för linjens lutning (eng.: slope) och kan beräknas enligt

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

där (x_1, y_1) och (x_2, y_2) är två punkter på linjen.

VARNING! I Stewart betecknas k med m!

(Stewart: $y = mx + b$)

- m beskriver y-koordinaten för den punkt där linjen skär y-axeln (eng.: y-intercept)

• För två räta linjer $y = k_1 x + m_1$, $y = k_2 x + m_2$ gäller att:

(i) $k_1 = k_2 \Leftrightarrow$ linjerna är parallella

(ii) $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow$ linjerna är vinkelräta

<u>Ex</u>. Ta fram ekvationen för den räta linje som går genom $(-1,-2)$ och är vinkelrät mot den räta linjen $2x + 5y + 8 = 0$.

<u>Lösn.</u>: $2x + 5y + 8 = 0 \Leftrightarrow 5y = -2x - 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x - \frac{8}{5} \Rightarrow k_2 = -\frac{2}{5}$$

Söker k_1 s.a. $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{-1}{k_2} = \frac{-1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + m$$

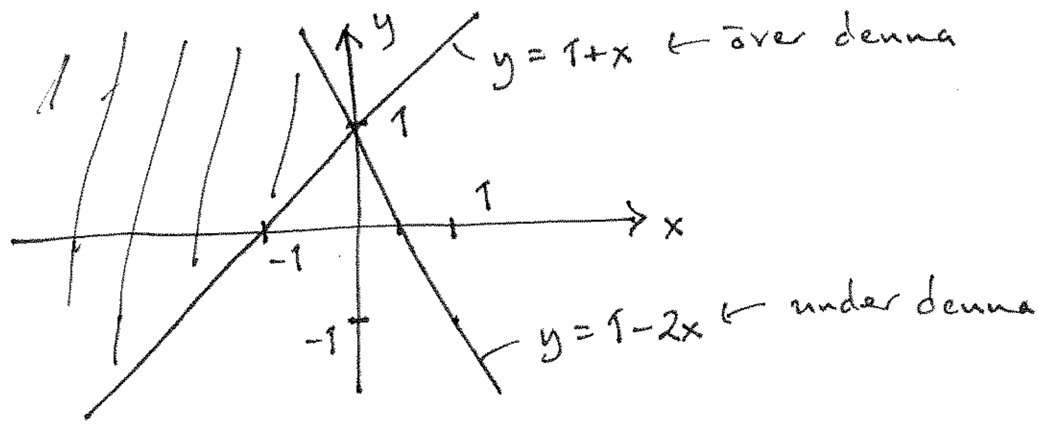
Linjen går genom $(-1,-2)$: $-2 = \frac{5}{2} \cdot (-1) + m$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

<u>Ex</u>. Rita mängden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x \leq y \leq 1 - 2x\}$

<u>Lösn.</u>:



Cirklar och cirkelskivor:

Ex. Beskriv grafen till $x^2+y^2=2$

Lösn.: $x^2+y^2=2 \iff \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \iff$

$\iff \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{2}$ ← avståndet från (x,y) till origo

$\therefore$ Cirkel med radie $\sqrt{2}$ och centrum i origo

Detta leder till:

Definition: Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $r>0$ vara konstanter

(i) En cirkel är grafen till en ekvation av formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (a,b) kallas cirkelns centrum och r dess radie

(ii) En cirkelskiva är grafen till en olikhet av formen $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ eller $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2$. I det första fallet säger vi att cirkelskivan är öppen, i det andra fallet att den är sluten.

Ex. Rita området som ges av grafen till olikheterna $x^2+y^2 \leq 4$ och $x^2+4x+y^2-4y \leq -4$

Lösn.: $x^2+y^2 \leq 4$ ← sluten cirkelskiva med centrum $(0,0)$ och radie 2

$x^2 + 4x + y^2 - 4y \leq -4$??? Kvadratkomplettera!

$$x^2+4x+y^2-4y = x^2+2\cdot x\cdot 2 + y^2 - 2\cdot y\cdot 2 =$$

$$= x^2 + 2\cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2\cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2 =$$

$$= (x+2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 =$$

$$= (x+2)^2 + (y-2)^2 - 8$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x+y^2-4y \leq -4 \iff (x+2)^2 + (y-2)^2 - 8 \leq -4$$

$$\iff (x+2)^2 + (y-2)^2 \leq 4$$

sluten cirkelskiva med centrum $(-2,2)$ och radie 2