

Övningstentamen 1 för kursen LMA033 0299 Matematik, del A analys för BI.

Tid: 4h Hjälpmedel: Inga Examinator: Håkan Blomqvist

Teori

1.a) Definiera begreppet generaliserad integral.

Förklara även vad som menas med att en generaliserad integral är konvergent respektive divergent. (2p)

b) Formulera Lagranges medelvärdessats. (Motivering eller bevis krävs ej!) (2p)

2. Bevisa att

a) om f är deriverbar i x så är f kontinuerlig i x . (2p)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (4p)

Problem

3.a) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x \, dx$ på två olika sätt, dels genom att använda egenskaperna hos jämna och udda funktioner och dels med hjälp av partiell integration. (3p)

b) Beräkna $\int_0^1 \frac{4x}{(2x+1)^3} dx$ med hjälp av en lämplig substitution. (3p)

4. Låt $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ med $D_f = \{x : (-1 \leq x < 1) \vee (x > 1)\}$.

a) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = f(x)$ (3p)

b) Lös ekvationen $f'(x) = 0$ (2p)

c) Gör teckenschema och ange med hjälp av detta eventuella lokala maximi- och minmipunkter samt terrasspunkter för kurvan $y = f(x)$. (3p)

d) Ange med hjälp av grafen till funktionen f antalet lösningar till ekvationen $f(x) = K$ för alla värden på konstanten K . (1p)

e) Lös ekvationen $f(x) = K$ för $K = \frac{27}{4}$. (2p)

OBS! Problemdelen med uppgifterna 5 – 7 finns på nästa sida.

5. Låt $g(x) = \arctan \frac{1}{2x} - \arcsin x$ med $D_g = (0,1]$.

a) Visa att $\tan g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 3$. (2p)

b) Visa att g är omvändbar. (2p)

c) Beräkna $g(\frac{1}{2})$ och $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$. (1p)

c) Beräkna $\phi'(\frac{\pi}{12})$. (1p)

e) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}} \phi''(x) dx$ där ϕ är inversen till g . (2p)

6.a) Partialbråksuppdelning $\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2(x^2 + 4)}$. (2p)

b) Beräkna $\int \frac{x^2 + 8x + 12}{x^2(x^2 + 4)} dx$. (4p)

c) Man vet att $F'(x) = \frac{x^2 + 8x + 12}{x^2(x^2 + 4)}$ och att $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Beräkna $F(2)$. (2p)

7. Bestäm konstanterna $A \neq -1$, B och C så att $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+A}{x-1} + \frac{B}{x^2+2x+C} \right) = \frac{3}{4}$. (6p)

SVAR:

3.a) 0 **3.b)** $\frac{2}{9}$

4.a) $x = 1$ lodrät asymptot, $y = x + 2$ sned asymptot då $x \rightarrow +\infty$.

b) $(x_{1,2} = 0) \vee (x_3 = 3)$ **e)** $x_{1,2} = 3, x_3 = \frac{3}{4}$

c)

x	-1		0		(1)		3		(∞)
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	+	0	+	$\pm \infty$	-	0	+	1
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	∞
	lok min		terr ass				lok min		

d)

$K > 27/4$, 3 rötter

$y = K$

$K = 27/4$, 2 rötter

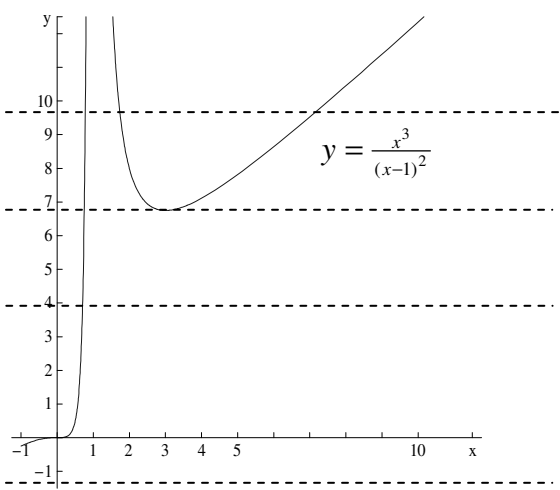
$y = K$

$-1/4 \leq K < 27/4$, 1 rot

$y = K$

$K < -1/4$, ingen rot

$y = K$



5.b)
$$\left. \begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0 \\ D_g &= (0,1] \text{ är ett intervall} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) \text{ är omvärdbar}$$
 c) $g(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{12}; g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{17}{5} - 2\sqrt{3}$

6.a) $\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{2x+2}{x^2+4}$ **b)** $\frac{3}{x} + \ln \frac{x^2}{x^2+4} - \arctan \frac{x}{2} + C$ **c)** $\pi - \frac{3}{2} - \ln 2$

7. $A = -2, B = 4$ och $C = -3$