

Övningstentamen 2 i kursen Matematik, del A för B11.

Tid: 4h Hjälpmedel: Inga Examinator: Håkan Blomqvist

Teori

1.a) Definiera begreppet "lokalt maximum". (2p)

b) Härled derivatan till funktionen $\arcsin x$. (2p)

2.a) Bevisa att om f är deriverbar i ett öppet intervall I , $a \in I$ och f har lokalt maximum i a så är $f'(a) = 0$. (3p)

b) Formulera och bevisa formeln för partiell integration. (3p)

Problem

3. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+k & \text{då } x \geq 0 \\ \frac{x-|x|}{x} & \text{då } x < 0 \end{cases} \quad \text{blir kontinuerlig.} \quad (2p)$$

4. Bestäm konstanten A så att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x^2 + A} - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2}$ existerar och beräkna gränsvärdet. (5p)

5.a) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ med hjälp av en lämplig trigonometrisk substitution. (4p)

b) Beräkna $\int \frac{2}{x^3 + x} dx$ med hjälp av partialbråksuppdelning. (4p)

c) Beräkna den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3 + x} dx$. (2p)

6. Konstruera kurvan $y = \ln(x^3 + 3x^2)$. (6p)

7. Bestäm största värdet av arean för en rektangel, som har sina hörn på cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$. (4p)

OBS! Problem 8 finns på nästa sida.

8. Låt $f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan \sqrt{x-1}$

a) Beräkna $f(2)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1p)

b) Bestäm definitionsmängden för f . (2p)

c) Visa att $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$. (3p)

d) Beräkna $\phi'(0)$ och $\phi''(0)$ där $\phi(x)$ är inversen till $f(x)$. (3p)

e) Beräkna $\tan f(x)$. (2p)

f) Lös ekvationen $f(x) = \frac{\pi}{4}$. (2p)

SVAR:

3. $k=2$ 4. $A=8, grv. = -\frac{1}{4}$ 5.a) $\frac{15}{4}$ b) $\ln \frac{x^2}{x^2+1} + C$ c) $\ln 2$

6. 1° $D_f = \{x: (-3 < x < 0) \vee (x > 0)\}$

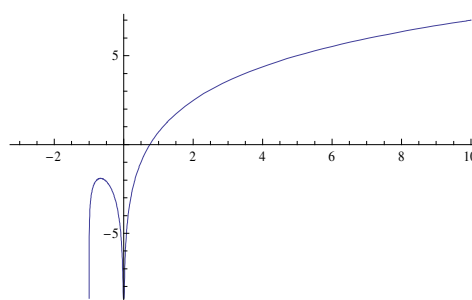
2° Lodräta asymptoter: $x = -3, x = 0$ Sneda asymptoter: Saknas!

3° $x = -2; f'(x) = \frac{3(x+2)}{x(x+3)}$

4° Teckenschema. Intr. x-värden $(-3), (-2), (0), (\infty)$. 5° Skissera grafen.

x	(-3)		-2		(0)		(∞)
$f'(x)$	∞	+	0	-	$\pm \infty$	+	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 4$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

lok
max



7. $\max A = 2R^2$

x	(0)		$\frac{R}{\sqrt{2}}$		(R)
$A'(x)$	$4R$	+	0	-	$-\infty$
$A(x)$	0	$\nearrow$	$2R^2$	$\searrow$	0

lok max

$$\mathbf{8.a)} \quad f(2) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arctan 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = " \arcsin 0 - \arctan \infty " = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{b)} \quad D_f = \left\{ x : (-1 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1) \wedge (x - 1 \geq 0) \right\} = \left\{ x : (1 \leq \sqrt{x}) \wedge (x \geq 1) \right\} = \{ x : x \geq 1 \}$$

$$\mathbf{d)} \quad f(2) = 0 \Leftrightarrow 2 = \phi(0) \quad (\text{Se uppgift 7a!}) \quad \phi'(0) = \frac{1}{f'(2)} = -2\sqrt{2-1} = -2$$

$$\phi''(0) = -\frac{f''(2)}{[f'(2)]^3} = -\frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2})^3} = 4$$

$$\mathbf{e)} \quad \tan f(x) - \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

$$\mathbf{f)} \quad x = 4 - 2\sqrt{2}$$