

Övnings tentamen 3 i Matematik, del A för BI1

Tid: 4h Hjälpmedel: Inga

Teori

1. Definiera följande begrepp: funktionen f har gränsvärdet G då x går mot a . (2p)

2. Bevisa att $D \cos x = -\sin x$. (Du får utan bevis använda att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.) (4p)

3. Antag att f är kontinuerlig och att $f \geq 0$ i ett öppet intervall I .

Antag vidare att x_0, x ligger i I , med $x_0 \leq x$.

Låt $A(x)$ vara arean av det område som begränsas av kurvan $y = f(x)$, x -axeln och de två vertikala linjer som går genom x_0 respektive x .

Bevisa att $A'(x) = f(x)$. (4p)

Problem

4. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x)}{x^2}$. (3p)

5. Beräkna exakt

a) $\tan\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ b) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$ (3p+3p)

6. En plåtbit skall klippas till i form av en cirkelsektor med omkretsen 2 m. Dimensionera plåtbiten så att dess area blir maximal. (4p)

7. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx}$ får den sneda asymptoten $y = -x + 2$ då $x \rightarrow -\infty$. (6p)

OBS! Problemdelen med uppgifterna 8 – 9 finns på nästa sida.

8.a) Konstruera kurvan $y = f(x) = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$ med $D_f = \{x : x \geq -2\}$. (6p)

(Ange speciellt eventuella asymptoter, lokala extrempunkter samt största och minsta värde. Gör teckenschema och skissera kurvan.)

b) Hur många rötter har ekvationen $f(x) = 2,9$? (1p)

c) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = f(x)$, x -axeln och de två vertikala linjerna $x = 0$ respektive $x = 1$. (4p)

d) Beräkna $\phi'(7e^{-1})$ där $\phi(x)$ är inversen till $g(x) = (x^2 + 3x + 3)e^{-x}$ med $D_g = \{x : x \geq 0\}$. (1p)

9. Beräkna integralerna **a)** $\int \frac{x^8}{(x^9 + 1)^2} dx$ och **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 + \tan x} dx$

med hjälp av lämpliga substitutioner. (3p+6p)

SVAR: 4. 8 5. a) $\tan(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}) = -1$ **b)** $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\pi}{4}$

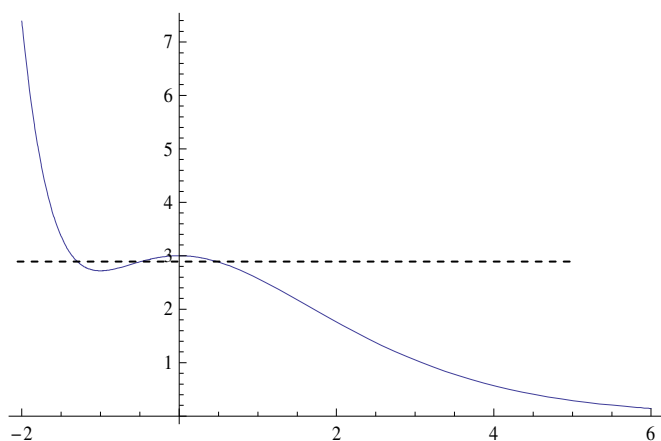
6. $A_{\max} = \frac{1}{4} \text{ (m}^2\text{)}$ då $R = \frac{1}{2} \text{ (m)}$ och $v = 2$ **7.** $a = 1, b = -4$

8.a) Lodräta asymptoter: Saknas! **Sneda asymptoter:** $y = 0$ då $x \rightarrow +\infty$

Teckenschema. Intressanta x -värden $-2, -1, 0, (\infty)$.

x	-2		-1		0		(∞)
$f'(x)$	$-2e^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	e^2	$\searrow$	e	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Lokala maxima i $(-2; e^2)$, $(0; 3)$. Lokalt minimum i $(-1; e)$.



b) 3 rötter **c)** $\frac{8e-14}{e}$ **ae** **d)** $\frac{e}{2}$ **9.a)** $-\frac{1}{9(x^9 + 1)} + C$ **b)** $\frac{\pi}{2}$