

Tentamen i Matematik del A för BI 2009–04–14

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x}}{x^2 - x}$.
(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x}$. (4p)
2. (a) Ange i vilka intervall funktionen $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$ är strängt växande respektive strängt avtagande?
(b) Bestäm ekvationen för tangent och normal till kurvan $y = \tan \sqrt{x}$, i punkten där $x = (\pi/4)^2$.
(c) Två lika breda rektanglar har sina baser på x -axeln, $0 \leq x \leq b$ resp $b \leq x \leq 2b$, och höjder parallella med y -axeln. Kurvan $y = 2 - \ln x$ skär dessa rektanglar i mittpunkten på resp rektangels överliggare. Hur breda, dvs b , är rektanglarna när summan av deras areor är maximal? (10p)
3. Funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$ är given. Ange asymptoter, lokala extrempunkter samt rita grafen till f . (5p)
4. (a) Lös ekvationen $1 + \ln x = \ln(2 + x)$.
(b) Funktionen $y = f(x)$ definieras av sambandet $x = \frac{1}{e^y + 1}$.
Beräkna $f(1/2)$, $f'(1/2)$, $f''(1/2)$. (6p)
5. Lös ekvationen $\arccos \frac{x}{\sqrt{2}} = \arctan x$. (5p)
6. Beräkna integralerna
(a) $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$.
(b) $\int_1^2 x \ln \frac{2}{x} dx$
(c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x} dx$. (12p)
7. Formulera definitionerna av kontinuitet och deriverbarhet i en punkt, samt visa att deriverbarhet medför kontinuitet i punkten. (4p)
8. Härled derivatorna av $\arcsin x$ och $\arctan x$. (4p)