

Tentamen i Matematik del A för BI 2010–04–09 kl. 8.30–12.30

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{3-x}}$.
(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9}$. (6p)
2. (a) Bestäm ekvationen för tangent och normal till kurvan $y = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ i den punkt där $x = 9$.
(b) I vilka punkter har tangenten till kurvan $y = e^{-2x^2+x}$ störst lutning (positiv resp. negativ)?
(c) Bestäm kortaste avståndet från kurvan $y = x^{3/2}$ till punkten $(4, 0)$. Ledning: avståndet, d , från (a, b) till (x, y) på kurvan $y = f(x)$ ges av $d^2 = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2$. Rita figur. (10p)
3. Funktionen $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x^2}$ är given. Ange asymptoter, lokala extrempunkter samt rita grafen till f . (5p)
4. (a) Lös ekvationen $\ln(x\sqrt{x}) - 2\ln 3 = 2\ln x$.
(b) Visa att olikheten $\ln(x) + \frac{4}{x+1} \geq 2$ gäller för $x \geq 1$. Motivera utförligt. (6p)
5. Ange definitionsmängden för funktionen $f(x) = \arccos\left(\frac{2}{1-x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och lös ekvationen $f(x) = 0$. (5p)
6. Beräkna integralerna
(a) $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2} dx$.
(b) $\int_1^2 (4x+1) \ln x \, dx$.
(c) $\int_2^\infty \frac{1}{t^3 - 2t^2 + t} dt$. (12p)
7. Definiera begreppet invers till en funktion och visa att funktionen $y = (x^2 + 2)e^x$ har invers. (3p)
8. Bevisa produktregeln för derivering, dvs formeln för $D(f(x)g(x))$. (3p)