Lösningar till övningstentamen 1 matematik, del A för BI

3.a) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\,dx$ på två olika sätt, dels genom att använda egenskaperna hos jämna och udda funktioner och dels med hjälp av partiell integration. (3p)

Lösning:

I Eftersom integrationsintervallet är symmetriskt erhålls: $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x}_{j}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{x\cos x}_{u}\,dx = 0$

II $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \overset{\uparrow}{\underset{\downarrow}{x}}\cos x\,dx = (PI) = \left[\underset{\downarrow}{x}\sin x\,dx\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \left[x\sin x + \cos x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - ((-\frac{\pi}{3})\sin(-\frac{\pi}{3}) + \cos(-\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - (\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}) = 0$

SVAR: 0

3.b) Beräkna $\int_0^1 \frac{4x}{(2x+1)^3}\,dx$ med hjälp av en lämplig substitution. (3p)

Lösning:

$$\int_0^1 \frac{4x}{(2x+1)^3}\,dx = \left[t = 2x+1;\ x = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2};\ \frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2};\ dx = \tfrac{1}{2}dt;\ \begin{matrix} x = 1 \leftrightarrow t = 3 \\ x = 0 \leftrightarrow t = 1 \end{matrix} \right] =$$

$$= \int_1^3 \frac{4(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2})}{t^3}\,\tfrac{1}{2}dt = \int_1^3 \frac{t-1}{t^3}\,dt = \int_1^3 (t^{-2} - t^{-3})\,dt = \left[-t^{-1} + \tfrac{1}{2}t^{-2}\right]_1^3 = \left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} - \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{-6+1+18-9}{18} = \frac{2}{9}$$

SVAR: $\frac{2}{9}$

4. Låt $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ med $D_f = \{x : (-1 \le x < 1) \vee (x > 1)\}$.

a) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = f(x)$ (3p)

Lodräta asymptoter: $x = a$

$$x \to 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \to +\infty \quad "\frac{1}{0^+}"$$

SVAR: $x = 1$ lodrät asymptot.

Sneda asymptoter: $y = kx + m$

$x \to +\infty \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{x})^2} \to \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$f(x) - kx = f(x) - x = \frac{x^3}{(x-1)^2} - \frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{(1-\frac{1}{x})^2} \to 2 \Rightarrow m = 2$$

SVAR: $y = kx + m = 1x + 2 = x + 2$ sned asymptot då $x \to +\infty$.

b) Lös ekvationen $f'(x) = 0$ (2p)

$$f'(x) = D\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 3x^2 - x^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)(3x-3-2x)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

varav $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x_{1,2} = 0) \vee (x_3 = 3)$

c) Bestäm eventuella lokala maximi- och minmipunkter samt terrasspunkter för kurvan $y = f(x)$. Motivera med teckenschema. (3p)

Teckenschema. Intressanta x-värden $-1, 0, (1), 3, (\infty)$

x	-1		0		(1)		3		(∞)
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	0	$+$	$\pm\infty$	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	∞
	lok min		terr ass				lok min		

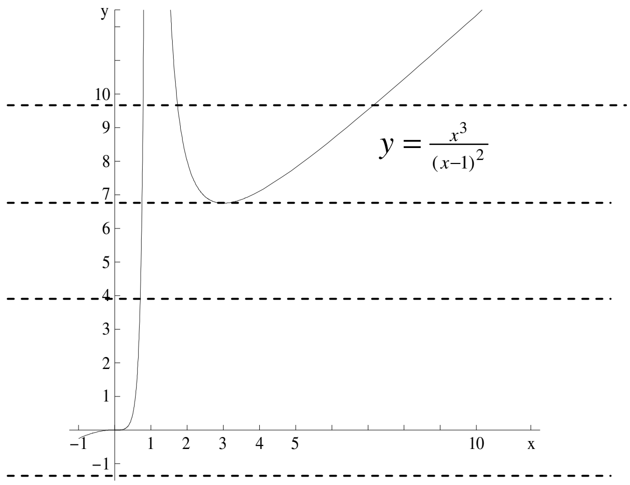
d) Ange med hjälp av grafen till funktionen *f* antalet lösningar till ekvationen $f(x) = \text{K}$ för alla värden på konstanten K. (1p)

$\text{K} > 27/4$, 3 rötter $\quad y = \text{K}$

$\text{K} = 27/4$, 2 rötter $\quad y = \text{K}$

$-1/4 \le \text{K} < 27/4$, 1 rot $\quad y = \text{K}$

$\text{K} < -1/4$, ingen rot $\quad y = \text{K}$



e) Lös ekvationen $f(x) = \text{K}$ för $\text{K} = \frac{27}{4}$. (2p)

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{27}{4} \underset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} 4x^3 = 27(x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$$

Enligt uppgift **5c** har ekvationen rötterna $x_{1,2} = 3$ och x_3 ($0 < x_3 < 1$). Det följer att

$$4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 4(x-3)^2(x - x_3) = (4x^2 - 24x + 36)(x - x_3) = \ldots - 36x_3$$

Identifikation av de konstanta termerna i första och sista leden ger: $-27 = -36x_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{3}{4}$

Alternativ lösning: Polynomdividera $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27$ med $(x-3)^2$ eller $x - 3$.

SVAR: $x_{1,2} = 3$, $x_3 = \frac{3}{4}$

6. Låt $g(x) = \arctan\dfrac{1}{2x} - \arcsin x$ med $D_g = (0,1]$.

a) Visa att $\tan g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2} - 3$. (2p)

Lösning: $\alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\quad \beta = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\beta = 1 \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} + 2} = \frac{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2 - 4} = 2\sqrt{2} - 3$$

b) Visa att g är omvändbar. (2p)

Lösning:

$$g'(x)=D\left[\arctan\frac{1}{2x}-\arcsin x\right]=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2x}\right)^2}D\left(\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{4x^2}{1+4x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{1+4x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \\ D_f=(0,1] \text{ är ett intervall}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x) \text{ är omvändbar}$$

c) Beräkna $g(\frac{1}{2})$ och $g(\frac{\sqrt{3}}{2})$. (1p)

Lösning:

$$g(\tfrac{1}{2})=\arctan 1-\arcsin\tfrac{1}{2}=\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\pi}{12}\,;\quad g(\tfrac{\sqrt{3}}{2})=\arctan\tfrac{1}{\sqrt{3}}-\arcsin\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{\pi}{3}=-\tfrac{\pi}{6}$$

d) Beräkna $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}}\phi''(x)\,dx$ där ϕ är inversen till g. (3p)

Lösning:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}}\phi''(x)\,dx=\left[\phi'(x)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}}=\phi'(\tfrac{\pi}{12})-\phi'(-\tfrac{\pi}{6})=\frac{1}{g'(\frac{1}{2})}-\frac{1}{g'(\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{1}{-1-\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1}{-\frac{1}{2}-2}=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}+\frac{2}{5}=-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}+\frac{2}{5}=-\frac{3-2\sqrt{3}}{3-4}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}-2\sqrt{3}$$

7.a) Partialbråksuppdela $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)}$. (2p)

Ansätt $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4} = \dfrac{(A+Bx)(x^2+4)+x^2(Cx+D)}{x^2(x^2+4)}$ varav följer att

$$x^2+8x+12 = (A+Bx)(x^2+4)+x^2(Cx+D) = (B+C)x^3+(A+D)x^2+4Bx+4A$$

$$\begin{array}{llll} x^3: & B+C & =0 & \Rightarrow C=-B=-2 \\ x^2: & A+D & =1 & \Rightarrow D=1-A=1-3=-2 \\ x^1: & 4B & =8 & \Rightarrow B=2 \\ x^0: & 4A & =12 & \Rightarrow A=3 \end{array}$$

varav

SVAR: $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)} = \dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4} = \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x+2}{x^2+4}$

b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)}\,dx$. (3p)

$$\int \frac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)}\,dx = \int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2x+2}{x^2+4}\right)dx = \int\left(3x^{-2}+2\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+4}-2\frac{1}{x^2+2^2}\right)dx =$$

$$= 3\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+2\ln|x|-\ln|x^2+4|-2\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C = -\frac{3}{x}+\ln\frac{x^2}{x^2+4}-\arctan\frac{x}{2}+C$$

c) Man vet att $F'(x)=\dfrac{x^2+8x+12}{x^2(x^2+4)}$ och att $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$. Beräkna $F(2)$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{x}+\ln\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}-\arctan\frac{x}{2}+C\right) = -0+\ln\frac{1}{1+0}-\tfrac{\pi}{2}+C=\pi \Rightarrow C=\tfrac{3\pi}{2}$$

SVAR: $F(2) = -\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{1}{2}-\arctan 1+\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{3}{2}-\ln 2-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2} = \pi-\dfrac{3}{2}-\ln 2$

7. Bestäm konstanterna $\mathrm{A} \neq -1$, B och C så att $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x+\mathrm{A}}{x-1}+\dfrac{\mathrm{B}}{x^2+2x+\mathrm{C}}\right)=\dfrac{3}{4}$. (6p)

Lösning:

$$f(x)=\frac{x+\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{x^2+2x+\mathrm{C}}=\frac{(x+\mathrm{A})(x^2+2x+\mathrm{C})+\mathrm{B}(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+\mathrm{C})}\to\text{"}\frac{(1+\mathrm{A})(3+\mathrm{C})}{0}\text{" då }\ x\to 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)\text{existerar} \Rightarrow (1+\mathrm{A})(3+\mathrm{C})=0 \underset{\mathrm{A}\neq -1}{\Rightarrow} 3+\mathrm{C}=0 \Rightarrow \mathrm{C}=-3$$

$$x^2+2x-3=x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2-1^2-3=(x+1)^2-2^2=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$$

$$f(x)=\frac{x+\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{(x-1)(x+3)}=\frac{(x+\mathrm{A})(x+3)+\mathrm{B}}{(x-1)(x+3)}=\frac{x^2+(\mathrm{A}+3)x+3\mathrm{A}+\mathrm{B}}{(x-1)(x+3)}=\frac{(x-1)(x-r)}{(x-1)(x+3)}$$

$$x^2+(\mathrm{A}+3)x+3\mathrm{A}+\mathrm{B}=(x-1)(x-r)=x^2-(r+1)x+r\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\big(-(r+1)=\mathrm{A}+3\big)\wedge\big(r=3\mathrm{A}+\mathrm{B}\big)\Rightarrow r=-\mathrm{A}-4\wedge\mathrm{B}=-4\mathrm{A}-4\ \text{ varav}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-r)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+\mathrm{A}+4}{x+3}=\frac{\mathrm{A}+5}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow\mathrm{A}=-2\Rightarrow\mathrm{B}=-4(-2)-4=4$$

SVAR: $\mathrm{A}=-2, \mathrm{B}=4$ och $\mathrm{C}=-3$