Lösningar till övningstentamen 2 i kursen Matematik, del A för B11.

3. Bestäm konstanten k så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x+k & \text{då} \quad x \geq 0 \\ \dfrac{x-|x|}{x} & \text{då} \quad x < 0 \end{cases}$$ blir kontinuerlig. (2p)

Lösning:

$D_f = \boldsymbol{R}$. f är kontinuerlig för $x > 0$ (polynom) och $x < 0$ (rationell funktion).

. f är kontinuerlig för $x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = k$ varav

$$k = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-(-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} 2 = 2$$

SVAR: $k = 2$

4. Bestäm konstanten A så att gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2 + A} - \sqrt{x^2 + 6x}}{x-2}$ existerar och beräkna gränsvärdet. (5p)

Lösning:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + A} - \sqrt{x^2 + 6x}}{x-2} \to \text{"}\frac{\sqrt{8+A} - 4}{0}\text{"} \text{ då } x \to 2.$$

Grv. ex. $\Rightarrow \sqrt{8+A} - 4 = 0 \Rightarrow A = 8$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 6x}}{x-2} = \frac{(\sqrt{2x^2 + 8} - \sqrt{x^2 + 6x})}{(x-2)} \cdot \frac{(\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x})}{(\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x})} =$$

$$= \frac{2x^2 + 8 - (x^2 + 6x)}{(x-2)(\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x})} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-2)(\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x})} =$$

[$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 8 = (x-3)^2 - 1^2 = (x-2)(x-4)$]

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x})} = \frac{x-4}{\sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{x^2 + 6x}} \to \frac{2-4}{\sqrt{16} + \sqrt{16}} = -\frac{1}{4} \text{ då } x \to 2$$

SVAR: $A = 8, grv. = -\dfrac{1}{4}$

5.a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$ med hjälp av en lämplig trigonometrisk substitution. (4p)

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^5 x}\cdot \sin x\,dx = \left[t=\cos x\ ;\ \frac{dt}{dx}=-\sin x\ ;\ \sin x\,dx=-dt;\ \begin{matrix} x=\frac{\pi}{3} \leftrightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=0 \leftrightarrow t=1 \end{matrix} \right] =$$

$$= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^5}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-5}\,dt = \left[-\tfrac{1}{4}t^{-4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[-\frac{1}{4t^4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{4}+4 = \frac{15}{4}$$

SVAR: $\dfrac{15}{4}$

b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{2}{x^3+x}\,dx$ med hjälp av partialbråksuppdelning. (4p)

Lösning:

$N(x) = x^3 + x = x(x^2+1)$ där x^2+1 är irreducibel.

Ansätt $\dfrac{2}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}$ varav följer att

$$2 = A(x^2+1)+x(Bx+C) = (A+B)x^2 + Cx + A$$

$$\begin{array}{lll} x^2: & A+B & =0 \quad \Rightarrow B=-A=-2 \\ x^1: & C & =0 \\ x^0: & A & =2 \end{array}$$

varav

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+0}{x^2+1} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x^2+1| + C = \ln\frac{x^2}{x^2+1} + C$$

SVAR: $\ln\dfrac{x^2}{x^2+1} + C$

c) Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3+x}\,dx$. (2p)

Lösning:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^3+x}\sin x\,dx = \left[\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x^2+1} = \ln 1 - \ln\tfrac{1}{2} = \ln 2$$

SVAR: $\ln 2$

6. Konstruera kurvan $y = \ln(x^3+3x^2)$. (6p)

$1^o\ D_f = \left\{x : x^3+3x^2>0\right\} = \left\{x : x^2(x+3)>0\right\} = \left\{x : (-3<x<0) \vee (x>0)\right\}$

2^o Asymptoter

Lodräta asymptoter: $x=-3, x=0$

$$x\to -3^+ \Rightarrow \ln(x^3+3x^2) = \ln(\underbrace{x^2}_{\to 9}\underbrace{(x+3)}_{\to 0^+})\to -\infty\ ;\ x\to 0 \Rightarrow \ln(\underbrace{x^2}_{\to 0^+}\underbrace{(x+3)}_{\to 3})\to -\infty$$

Sneda asymptoter: Saknas!

$x\to +\infty \Rightarrow$

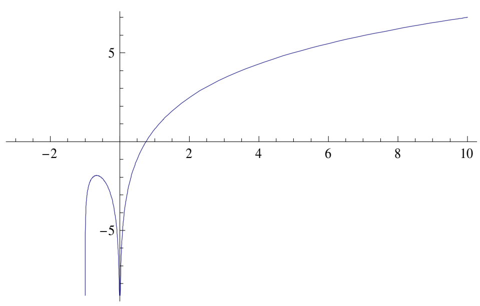
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x^3\cdot(1+\frac{3}{x})}{x} = 3\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1+\frac{3}{x})}{x} \to 3\cdot 0 + 0 = 0 = k$$

$$f(x)-kx = f(x)-0\cdot x = f(x) = \ln(x^3+3x^2) = \ln(\underbrace{x^3}_{\to\infty}\underbrace{(1+\tfrac{1}{x})}_{\to 1}) \to \infty \Rightarrow m\text{-värde ex. ej!}$$

$$3^o\ f'(x) = \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2} = \frac{3x(x+2)}{x^2(x+3)} = \frac{3(x+2)}{x(x+3)};\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

4^o Teckenschema. Intr. x-värden (-3), -2, (0), (∞). 5^o Skissera grafen.

x	(-3)		-2		(0)		(∞)
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 4$ lok max	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	∞



7. Bestäm största värdet av arean för en rektangel, som har sina hörn
på cirkeln $x^2 + y^2 = R^2$. (4p)

Lösning:

$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

I första kvadranten har rektangeln sitt hörn i punkten $\left(x\,;\sqrt{R^2 - x^2}\right)$.

$$A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} + 4x\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = 4\frac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}.\ D_f = (0;R).$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}.\ A\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) = 4\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = 4\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot\frac{R}{\sqrt{2}} = 2R^2$$

4° **Teckenschema.** Intressanta x-värden $0, \frac{R}{\sqrt{2}}, R$

x	(0)		$\frac{R}{\sqrt{2}}$		(R)
$A'(x)$	$4R$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$A(x)$	0	$\nearrow$	$2R^2$	$\searrow$	0
			lok max		

SVAR: $\max A = 2R^2$

8. Låt $f(x) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan\sqrt{x-1}$

a) Beräkna $f(2)$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. (1p)

Lösning:

$f(2) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \arctan 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \text{"}\arcsin 0 - \arctan\infty\text{"} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

b) Bestäm definitionsmängden för f. (2p)

Lösning:

$D_f = \left\{x : (-1 \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1) \wedge (x - 1 \ge 0)\right\} = \left\{x : (1 \le \sqrt{x}) \wedge (x \ge 1)\right\} = \{x : x \ge 1\}$

c) Visa att $f'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = D\left[\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arctan\sqrt{x-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}}D\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2}D\left(\sqrt{x-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot(-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) - \frac{1}{1+x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2x\sqrt{x-1}} = -\frac{2}{2x\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

d) Beräkna $\phi'(0)$ och $\phi''(0)$ där $\phi(x)$ är inversen till $f(x)$. (3p)

Lösning:

$f(2) = 0 \Leftrightarrow 2 = \phi(0)$ (Se uppgift 7a!)

$$\phi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = -y\sqrt{y-1} \Rightarrow \phi'(0) = \frac{1}{f'(2)} = -2\sqrt{2-1} = -2$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \Rightarrow f''(x) = Df'(x) = -D[x^{-1}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}] =$$

$$= -[-x^{-2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}} + x^{-1}\cdot(-\tfrac{1}{2})(x-1)^{-\frac{3}{2}}] = \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2x(x-1)\sqrt{x-1}} =$$

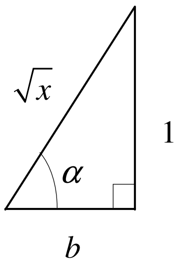
$$= \frac{2(x-1)+x}{2x^2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{3x-2}{2x^2(x-1)\sqrt{x-1}} \Rightarrow f''(2) = \frac{6-2}{2\cdot 4(2-1)\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\phi''(0) = -\frac{f''(2)}{[f'(2)]^3} = -\frac{\frac{1}{2}}{(-\frac{1}{2})^3} = 4$$

e) Beräkna $\tan f(x)$ (2p)

Lösning:

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \\ 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad \beta = \arctan\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\beta = \sqrt{x-1} > 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Pythagoras sats ger

$$b^2 + 1^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow b^2 = x - 1 \Rightarrow b = (\pm)\sqrt{x-1}$$

$$\tan\alpha = \tfrac{1}{b} = \tfrac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}}{1+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(x-1)}{\sqrt{x-1}} = -\frac{x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

f) Lös ekvationen $f(x) = \frac{\pi}{4}$. (2p)

Lösning:

$$f(x) = \tfrac{\pi}{4} \Rightarrow \tan f(x) = \tan\tfrac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{x-2}{2\sqrt{x-1}} = 1 \Rightarrow -(x-2) = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \\ D_f = [1,\infty) \text{ är ett intervall} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ är strängt avtagande, och eftersom}$$

$f(1) = \arcsin 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$ och $f(2) = 0$ har ekvationen $f(x) = \frac{\pi}{4}$ precis en rot, som ligger mellan 1 och 2, varför $x = 4 + 2\sqrt{2} > 2$ förkastas.

SVAR: $x = 4 - 2\sqrt{2}$