Lösningar till övningstentamen 3 i Matematik del A för BI

4. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(4x)}{x^2}$. (3p)

Lösning:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(4x)}{1+\cos(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(4x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(4x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(4x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(4x)}{16x^2}\cdot\frac{16}{1+\cos(4x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\right)^2\cdot\frac{16}{1+\cos(4x)}=1^2\cdot\frac{16}{1+1}=8$$

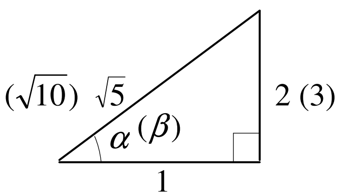
5. Beräkna exakt

a) $\tan\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ **b)** $\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (2p+2p)

Lösning:

a) $\alpha=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}>0\\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$, $\beta=\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}>0\\ 0<\beta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Pythagoras sats ger hjälptrianglarna



$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=\frac{5}{-5}=-1$$

b) $\tan(\alpha+\beta)=-1\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}+n\pi$

$$\begin{array}{c}0<\alpha\le\frac{\pi}{2}\\ 0<\beta\le\frac{\pi}{2}0\\ \hline 0+0<\alpha+\beta\le\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\end{array}$$

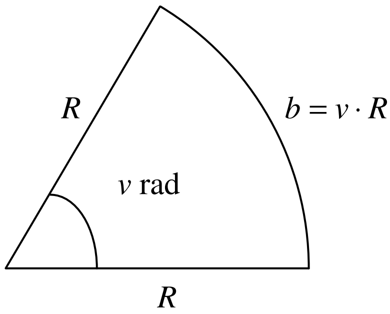
$$0<\alpha+\beta\le\pi\Leftrightarrow 0<-\tfrac{\pi}{4}+n\pi\le\pi\Leftrightarrow 0<-\tfrac{1}{4}+n\le 1\Leftrightarrow\tfrac{1}{4}<n\le\tfrac{5}{4}$$

varav följer att $n=1$ och att $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

SVAR: a) $\tan(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}})=-1$ **b)** $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\pi}{4}$

6. En plåtbit skall klippas till i form av en cirkelsektor med omkretsen 2 m.
Dimensionera plåtbiten så att dess area blir maximal. (4p)

Lösning:



Cirkelsektorns omkrets P är

$$P = b + 2R \Leftrightarrow b = P - 2R \qquad \left(v = \frac{b}{R} = \frac{P-2R}{R} \right)$$

Arean A av en cirkelsektor med radien R och bågen b är

$$A = \frac{b \cdot R}{2} \Rightarrow A = \frac{(P-2R)\cdot R}{2} = \frac{PR - 2R^2}{2} = \frac{PR}{2} - \frac{2R^2}{2} = \frac{P}{2}R - R^2 = (P = 2) = R - R^2$$

Vi skall alltså söka största värde för funktionen

$$A(R) = R - R^2 \text{ med } D_A = \{R : 0 < R < 1\}$$

Anm. $b = P - 2R > 0 \Rightarrow P > 2R \Rightarrow R < \dfrac{P}{2} \Rightarrow R < 1$

$$A'(R) = \frac{dA(R)}{dR} = \frac{d}{dR}(R - R^2) = 1 - 2R\,,\ A'(R) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2R = 0 \Leftrightarrow R = \tfrac{1}{2}$$

TECKENSCHEMA Intressanta R-värden är 0, $\frac{1}{2}$ och 1.

R	(0)		$\frac{1}{2}$		(1)
$A'(R)$	1	+	0	–	−1
$A(R)$	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

SVAR: $A_{\max} = \frac{1}{4}\ (\text{m}^2)$ då $R = \frac{1}{2}\ (\text{m})$ och $v = 2$.

7. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen $f(x)=\sqrt{ax^2+bx}$
får den sneda asymptoten $y=-x+2$ då $x\to-\infty$. (6p)

Lösning:

$$x<0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{ax^2+bx}=\sqrt{x^2(a+\tfrac{b}{x})}=\sqrt{x^2}\sqrt{a+\tfrac{b}{x}}=|x|\sqrt{a+\tfrac{b}{x}}=-x\sqrt{a+\tfrac{b}{x}}$$

$$x\to-\infty \Rightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{-x\sqrt{a+\frac{b}{x}}}{x}=-\sqrt{a+\tfrac{b}{x}}\to-\sqrt{a}=k=-1\Rightarrow a=1$$

$$x\to-\infty \Rightarrow f(x)-kx=f(x)+x=-x\sqrt{1+\tfrac{b}{x}}+x=-x(\sqrt{1+\tfrac{b}{x}}-1)=$$

$$=\frac{-x(\sqrt{1+\frac{b}{x}}-1)}{1}\cdot\frac{(\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1)}{(\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1)}=\frac{-x\left(\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)^2-1^2\right)}{\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1}=\frac{-b}{\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1}\to-\frac{b}{2}=m=2$$

SVAR: $a=1$, $b=-4$

8.a) Konstruera kurvan $y=f(x)=(x^2+3x+3)e^{-x}$ med $D_f=\{x:x\geq-2\}$. (6p)

(Ange speciellt eventuella asymptoter, lokala extrempunkter samt
största och minsta värde. Gör teckenschema och skissera kurvan.)

Lösning:

1° $D_f=\{x:x\geq-2\}$

2° **Lodräta asymptoter:** Saknas!

Sneda asymptoter: $y=0$

$x\to+\infty\Rightarrow$ (Enligt satsen om storleksordning för exponentialfunktionen följer att:)

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{(x^2+3x+3)e^{-x}}{x}=\frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{xe^x}=\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to0}(1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{3}{x^2})\to0\cdot1=0\Rightarrow k=0$$

$$f(x)-kx=f(x)=\frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{e^x}=\underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\to0}(1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{3}{x^2})\to0\cdot1=0\Rightarrow m=0$$

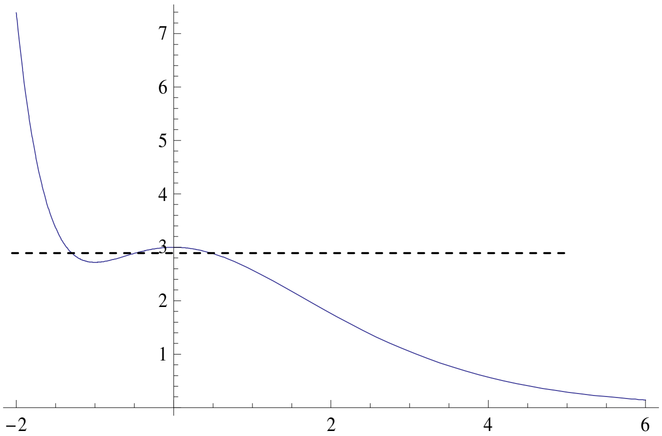
3° $f'(x)=D((x^2+3x+3)e^{-x})=(2x+3)e^{-x}+(x^2+3x+3)e^{-x}(-1)=-x(x+1)e^{-x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow(x=-1)\vee(x=0)$

4° Teckenschema. Intressanta x-värden -2, -1, 0, (∞).

x	-2		-1		0		(∞)
$f'(x)$	$-2e^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	e^2	↘	e	↗	3	↘	0

Lokala maxima i $(-2;e^2)$, $(0;3)$. Lokalt minimum i $(-1;e)$.



b) Hur många rötter har ekvationen $f(x) = 2{,}9$? (1p)

Lösning: Låt linjen $y = 2{,}9$ skära grafen. (Se figuren ovan!)

SVAR: 3 rötter!

c) Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = f(x)$, x-axeln och de två vertikala linjerna $x = 0$ respektive $x = 1$. (4p)

Lösning:

$$A = \int_0^1 (x^2+3x+3)e^{-x}\,dx = \left[t=-x;\ x=-t;\ \frac{dx}{dt}=-1;\ dx=-dt;\ \begin{matrix} x=1 \leftrightarrow t=-1 \\ x=0 \leftrightarrow t=0 \end{matrix} \right] =$$

$$= -\int_0^{-1} e^t\cdot(t^2-3t+3)\,dt = (PI) = \Big[-e^t\cdot(t^2-3t+3)\Big]_0^{-1} + \int_0^{-1} e^t\cdot(2t-3)\,dt = (PI) =$$

$$= \Big[-e^t\cdot(t^2-3t+3)\Big]_0^{-1} + \Big[e^t\cdot(2t-3)\Big]_0^{-1} - \int_0^{-1} e^t\cdot 2\,dt =$$

$$= \Big[-e^t\,(t^2-3t+3-2t+3+2)\Big]_0^{-1} = \Big[-e^t\cdot(t^2-5t+8)\Big]_0^{-1} = -\frac{14}{e}+8 = \frac{8e-14}{e}$$

SVAR: $\dfrac{8e-14}{e}$ ae

d) Beräkna $\phi'(7e^{-1})$ där $\phi(x)$ är inversen till
$g(x)=(x^2+3x+3)e^{-x}$ med $D_g=\{x : x\geq 0\}$. (1p)

Lösning:

$$g(1)=7e^{-1} \Leftrightarrow \phi(g(1))=\phi(7e^{-1}) \Leftrightarrow 1=\phi(7e^{-1})$$

varav

$$\phi'(7e^{-1})=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{-1(1+1)e^{-1}}=-\frac{1}{2e^{-1}}=-\frac{e}{2}$$

SVAR: $-\frac{e}{2}$

9. Beräkna integralerna **a)** $\displaystyle\int \frac{x^8}{(x^9+1)^2}\,dx$ och **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+\tan x}\,dx$

med hjälp av lämpliga substitutioner. (3p+6p)

Lösning:

a) $$\int \frac{x^8}{(x^9+1)^2}\,dx=\left[t=x^9+1; \frac{dt}{dx}=9x^8; x^8dx=\tfrac{1}{9}dt\right]=\tfrac{1}{9}\int \frac{1}{t^2}\,dt=\tfrac{1}{9}\int t^{-2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{9t}+C=-\frac{1}{9(x^9+1)}+C$$

SVAR: $-\frac{1}{9(x^9+1)}+C$

b) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+\tan x}\,dx=\left[\begin{matrix} t=\tan x \\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\end{matrix}; \frac{dt}{dx}=1+\tan^2 x=1+t^2; dx=\frac{dt}{t^2+1}; \begin{matrix} x=\frac{\pi}{2}\leftrightarrow t=\infty \\ x=0\leftrightarrow t=0\end{matrix}\right]=$$

$$=\int_0^{\infty} \frac{2}{(t+1)(t^2+1)}\,dt=\int_0^{\infty} f(t)\,dt=[F(t)]_0^{\infty}$$

Ansätt: $f(t)=\dfrac{2}{(t+1)(t^2+1)}=\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{Bt+C}{t^2+1}$

$$\frac{2}{(t+1)(t^2+1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}=\frac{A(t^2+1)+(t+1)(Bt+C)}{(t+1)(t^2+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=At^2+A+Bt^2+Ct+Bt+C=(A+B)t^2+(B+C)t+A+C$$

$$\begin{array}{llll} t^2: & A+B & =0 & \Rightarrow A=-B\Rightarrow A=-(-1)=1 \\ t^1: & B+C & =0 & \Rightarrow C=-B\Rightarrow C=-(-1)=1 \\ t^0: & A+C & =2 & \Rightarrow -B-B=2\Rightarrow -2B=2\Rightarrow B=-1 \end{array}$$

varav

$$F(t)=\int\frac{2}{(t+1)(t^2+1)}dt=\int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2+1}\right)dt=\int\left(\frac{1}{t+1}+\frac{-t+1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\ln|\,t+1\,|-\tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t$$

där

$$\ln|\,t+1\,|-\tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)=\tfrac{1}{2}(2\ln|\,t+1\,|-\ln(t^2+1))=\tfrac{1}{2}(\ln|\,t+1\,|^2-\ln(t^2+1))=$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2+1}=\tfrac{1}{2}\ln\frac{t^2(1+\frac{1}{t})^2}{t^2(1+\frac{1}{t^2})}=\tfrac{1}{2}\ln\frac{(1+\frac{1}{t})^2}{1+\frac{1}{t^2}}$$

varav

$$F(t)=\ln|\,t+1\,|-\tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t=\tfrac{1}{2}\ln\frac{(1+\frac{1}{t})^2}{1+\frac{1}{t^2}}+\arctan t$$

så att

$$I=[F(t)]_0^\infty=\lim_{t\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\ln\frac{(1+\frac{1}{t})^2}{1+\frac{1}{t^2}}+\arctan t\right)-\lim_{t\to 0^+}\left(\ln|\,t+1\,|-\tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+\arctan t\right)=$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln 1+\tfrac{\pi}{2}-\ln 1+\tfrac{1}{2}\ln 1-0=\tfrac{\pi}{2}$$

SVAR: $\frac{\pi}{2}$