Lösningar till tentamen i LMA033 0299 Matematik, del A, för BI1 den 29 april 2011.

3. Beräkna $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{2x^3-4x^2+x-2}$. (4p)

Lösning:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{2x^3-4x^2+x-2}="\frac{0}{0}"\text{ (obestämt uttryck)}$$

$$f(x)=\frac{x^2-6x+8}{2x^3-4x^2+x-2}=\frac{x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+8}{2x^2(x-2)+x-2}=\frac{(x-3)^2-1^2}{(x-2)(2x^2+1)}=$$

$$=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(2x^2+1)}=\frac{x-4}{2x^2+1}\to\frac{2-4}{2\cdot 2^2+1}=-\frac{2}{9}\text{ då }x\to 2$$

4. Låt $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}-\arctan x$.

a) Konstruera kurvan $y=f(x)$. (5p)

Lösning:

1° $D_f=\{x:x\neq 0\}$

2° **Lodräta asymptoter:** Saknas!

$$x\to 0^+\Rightarrow f(x)=\arctan\frac{1}{x}-\arctan x\to\tfrac{\pi}{2}-0=\tfrac{\pi}{2},$$

$$x\to 0^-\Rightarrow f(x)=\arctan\frac{1}{x}-\arctan x\to-\tfrac{\pi}{2}-0=-\tfrac{\pi}{2}$$

Sneda asymptoter: $y=kx+m=0x+(\mp\tfrac{\pi}{2})=\mp\tfrac{\pi}{2}$ sned asymptot då $x\to\pm\infty$.

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x}-\frac{\arctan x}{x}\to 0=k\text{, ty }-\tfrac{\pi}{2}<\arctan g(x)<\tfrac{\pi}{2}$$

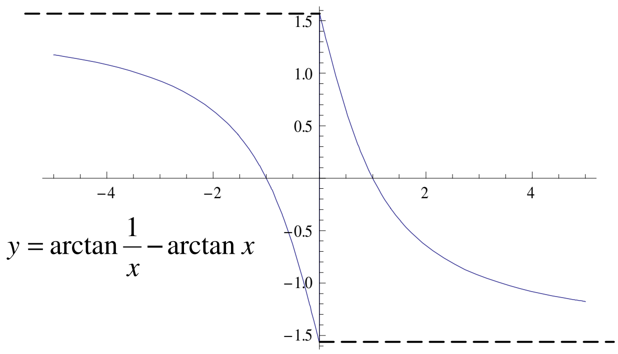
$$x\to\pm\infty\Rightarrow f(x)-kx=f(x)=\arctan\frac{1}{x}-\arctan x\to 0-(\pm\tfrac{\pi}{2})=\mp\tfrac{\pi}{2}=m$$

3° Derivata:

$$f'(x)=D\left(\arctan\frac{1}{x}-\arctan x\right)=\frac{\cdot 1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{\cdot 1}{x^2}\right)-\frac{1}{1+x^2}=-\frac{2}{\underbrace{1+x^2}_{>0}}<0$$

4° **Teckenschema.** Intressanta x-värden $(-\infty), 0, (\infty)$

x	$(-\infty)$		(0)		(∞)
$f'(x)$	0	$-$	-2	$-$	0
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2} / \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

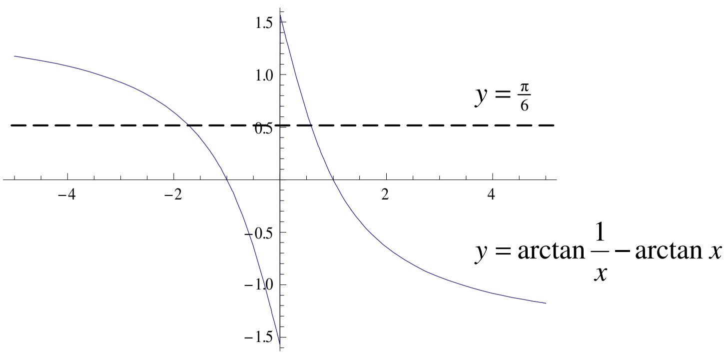


b) Ange, med hjälp av grafen till $y = f(x)$, antalet lösningar till ekvationen

$$\arctan\frac{1}{x} = \tfrac{\pi}{6} + \arctan x . \qquad \text{(1p)}$$

Lösning:

$$\arctan\frac{1}{x} = \tfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arctan\frac{1}{x} - \arctan x = \tfrac{\pi}{6}$$



SVAR : 2 rötter

SVAR: 2 rötter

c) Lös ekvationen $\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{6} + \arctan x$. (3p)

Lösning:

$$\underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{\alpha} = \frac{\pi}{6} + \underbrace{\arctan x}_{\beta} \Rightarrow \tan\alpha = \tan(\tfrac{\pi}{6} + \beta)$$

$$\alpha = \arctan\frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \frac{1}{x} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \beta = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\beta = x \\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{6} + \beta) = \frac{\tan\frac{\pi}{6} + \tan\beta}{1 - \tan\frac{\pi}{6}\tan\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + x}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x} = \frac{1 + x\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x}$$

$$\tan\alpha = \tan(\tfrac{\pi}{6} + \beta) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1 + x\sqrt{3}}{\sqrt{3} - x} \Rightarrow \sqrt{3} - x = x + x^2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 + \tfrac{2}{\sqrt{3}}x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} + 1} = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \pm \tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

SVAR: $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

KONTROLL: $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ OK!

5. Beräkna $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 6x + 8}\,dx$. (2p)

Lösning:

Ansätt: $$\frac{1}{x^2 - 6x + 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A - 2B}{(x-2)(x-4)}$$

x^1 :	$A + B$	$= 0$	$\Rightarrow B = -A$
x^0 :	$-4A - 2B$	$= 1$	$\Rightarrow -4A + 2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 8}\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-4} \right) dx = -\tfrac{1}{2}\ln|x-2| + \tfrac{1}{2}\ln|x-4| + C$$

SVAR: $\frac{1}{2}\ln\frac{|x-4|}{|x-2|} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + C$

6.a) Beräkna $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+(\sin x)^{10}}\,dx$. **b)** Beräkna $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\,dx$

c) Motivera varför integralen $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\,dx$ är generaliserad

och avgör om integralen är konvergent eller divergent. (1+4+2p)

Lösning:

a) Eftersom integrationsintervallet är symmetriskt erhålls:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\overbrace{\tan x}^{u}}{\underbrace{1+(\sin x)^{10}}_{j}}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} u\,dx = 0$$

b) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\cos x)^2}\sin x\,dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\cos x)^2}(-\sin x)\,dx =$$

$$= \left[t=\cos x\,;\ \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx;\ \begin{matrix} x=\frac{\pi}{3} \leftrightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=0 \leftrightarrow t=1 \end{matrix} \right] =$$

$$= -\int_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{-2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -1+2 = 1$$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^2}$ är ej kontinuerlig på $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, men på $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos x)^2}\sin x\,dx = \left[-\frac{1}{t}\right]_{0}^{1} = \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{1}{t}\right) - \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{t}\right)}_{\text{ex.ej!}} \quad \text{"}-1+\infty\text{"}$$

vilket medför att integralen är divergent.

7. En likbent triangel har omkretsen $6p$ där p är en konstant.

a) Visa att triangelns area ges av uttrycket $A(x) = (3p - x)\sqrt{6px - 9p^2}$
där x är längden av en av de båda lika långa sidorna. (1p)

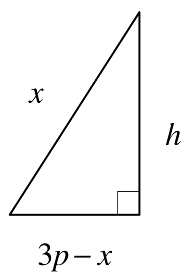
b) Bestäm definitionsmängd för funktionen $A(x) = (3p - x)\sqrt{6px - 9p^2}$. (1p)

c) Beräkna det största värde som triangelns area kan anta. (3p)

Lösning:

a) Antag att triangelns sidor har längderna x, x och y. Då följer att

$$2x + y = 6p \Leftrightarrow y = 6p - 2x \Leftrightarrow \frac{y}{2} = 3p - x\ .$$



Pythagoras sats ger

$$h^2 + (3p - x)^2 = x^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{x^2 - (3p - x)^2} = \sqrt{6px - 9p^2}$$

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot h = \tfrac{1}{2}(6p - 2x)\sqrt{6px - 9p^2} = (3p - x)\sqrt{6px - 9p^2}$$

b) $6px - 9p^2 > 0 \Leftrightarrow 6px > 9p^2 \Leftrightarrow x > \frac{3p}{2}$

$y = 6p - 2x > 0 \Leftrightarrow 6p > 2x \Leftrightarrow x < 3p$

SVAR: $D_A = \left\{x : \frac{3p}{2} < x < 3p\right\}$

c) $A'(x) = D\left[(3p-x)\sqrt{6px-9p^2}\right] = (0-1)\sqrt{6px-9p^2} + (3p-x)\dfrac{6p}{2\sqrt{6px-9p^2}} =$

$$= \frac{-\left(\sqrt{6px-9p^2}\right)^2 + (3p-x)3p}{\sqrt{6px-9p^2}} = \frac{-6px+9p^2+9p^2-3px}{\sqrt{6px-9p^2}} = \frac{-9p(x-2p)}{\underbrace{\sqrt{6px-9p^2}}_{>0}}$$

varav $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2p$

Teckenschema. Intressanta x-värden $(\frac{3p}{2}), 2p, (3p)$

x	$(\frac{3p}{2})$		$2p$		$(3p)$
$A'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-p$
$A(x)$	0	$\nearrow$	$p^2\sqrt{3}$	$\searrow$	0
			lok max		

SVAR: $p^2\sqrt{3}$ ae

8. Funktionen $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - 2\ln x$ är given.

a) Bestäm alla asymptoter till $f(x)$. (3,5p)

Lösning:

a) $D_f = \{x : (x+1) > 0 \wedge (x-1) > 0 \wedge x > 0\} \Rightarrow D_f = \{x : x > 1\}$

Lodräta asymptoter: $x = 1$

$x \to 1^+ \Rightarrow f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - 2\ln x \to -\infty$ "$\ln 2 - \infty - 2\ln 1$"

Sneda asymptoter: $y = kx + m = 0x + 0 = 0$ sned asymptot då $x \to \infty$.

$$x \to \infty \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{\ln(x-1)}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \to 0 = k$$

ty potensfunktionen x dominerar alla logaritmfunktioner då $x \to \infty$.

$$x \to \infty \Rightarrow f(x) - kx = f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln x^2 = \ln\frac{(x+1)(x-1)}{x^2} =$$

$$= \ln\frac{x^2-1}{x^2} = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \to \ln 1 = 0 = m$$

b) Visa att $f(x)$ är omvändbar. (2,5p)

Lösning:

b) $f'(x) = D[\ln(x+1) + \ln(x-1) - 2\ln x] = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - 2\frac{1}{x} =$

$$= \frac{x(x-1) + x(x+1) - 2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 - x + x^2 + x - 2x^2 + 2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{2}{\underbrace{x}_{>1}(\underbrace{x+1}_{>2})(\underbrace{x-1}_{>0})} > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ D_f = (1,\infty) \text{ är ett intervall} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ är omvändbar}$$

c) Bestäm värdemängden till $f(x)$. Motivera med teckenschema. (1p)

Lösning:

$V_f = \{ y : y < 0\} = (-\infty, 0)$

Teckenschema. Intressanta x-värden $(1), (\infty)$

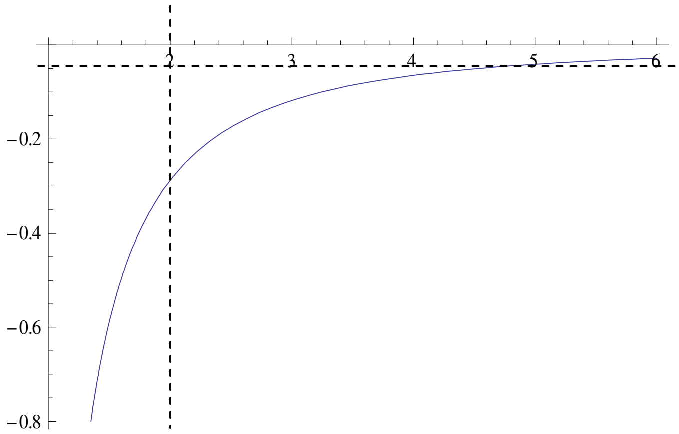
x	(1)		(∞)
$f'(x)$	∞	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

d) Bestäm definitionsmängd och värdemängd för inversen till $f(x)$. (1p)

Lösning:

d) $D_\phi = V_f = (-\infty, 0)$, $V_\phi = D_f = (1, \infty)$

e) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av kurvan $y = f(x)$
samt de räta linjerna $x = 2$ och $y = \ln\frac{24}{25}$. (Gör figur!) (5p)



$$f(x) = \ln\tfrac{24}{25} \Rightarrow \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\tfrac{24}{25} \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2} = \frac{24}{25} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = (\pm)5 \text{ ty } x > 1$$

$$A = \int_2^5 \left[\ln\tfrac{24}{25} - f(x)\right]dx = \ln\tfrac{24}{25}\int_2^5 1\,dx - \int_2^5 f(x)\,dx = 3\ln\tfrac{24}{25} - \left[F(x)\right]_2^5$$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \overbrace{1}^{\uparrow} \cdot \underbrace{\left[\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right]}_{\downarrow}dx = (PI) =$$

$$= x\cdot\underbrace{\left[\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right]}_{\downarrow} - \int x\cdot\left[\tfrac{1}{x+1}+\tfrac{1}{x-1}-\tfrac{2}{x}\right]dx =$$

$$= x\left[\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right] - \int\left[\tfrac{x+1-1}{x+1}+\tfrac{x-1+1}{x-1}-2\right]dx =$$

$$= x\left[\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right] - \int\left[1-\tfrac{1}{x+1}+1+\tfrac{1}{x-1}-2\right]dx =$$

$$= x\left[\ln(x+1)+\ln(x-1)-2\ln x\right] + \ln(x+1) - \ln(x-1) =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1) - 2x\ln x$$

$$\left[F(x)\right]_2^5 = F(5) - F(2) = 6\ln 6 + 4\ln 4 - 10\ln 5 - (3\ln 3 + \ln 1 - 4\ln 2) =$$

$$= 6\ln 2 + 6\ln 3 + 8\ln 2 - 10\ln 5 - 3\ln 3 + 4\ln 2 = 3\ln 3 + 18\ln 2 - 10\ln 5$$

$$\ln\tfrac{24}{25} = \ln(3\cdot 8) - \ln 25 = \ln 3 + \ln 2^3 - \ln 5^2 = \ln 3 + 3\ln 2 - 2\ln 5$$

$$A = 3\ln\tfrac{24}{25} - \left[F(x)\right]_2^5 = 3\ln 3 + 9\ln 2 - 6\ln 5 - 3\ln 3 - 18\ln 2 + 10\ln 5 = 4\ln 5 - 9\ln 2 \text{ ae}$$