

HEMUPPGIFTER I MATEMATISK ANALYS FÖR BI, VECKA 2

1. Beräkna $y'(1)$ och $y''(1)$ då $y^3 - xy^2 = -2x$.

(Ledning: Ekvationen $y^3 - y^2 + 2 = 0$ har en heltalsrot. $y'' = \frac{dy'}{dx}$.)

2. Funktionen $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{då} & x \leq -2 \\ x^2 + 3x + 2 & \text{då} & -2 < x \leq -1 \\ 2x+2 & \text{då} & -1 < x < 3 \end{cases}$ är given.

a) Ange för $f(x)$ största och minsta värde, (om dessa finns), på följande intervall.

$$I_1 = [0, 1], \quad I_2 = [0, 3], \quad I_3 = (-\infty, 3), \quad I_4 = [-4, 0], \quad I_5 = (-1, 1).$$

(Ledning: Rita först grafen till funktionen.)

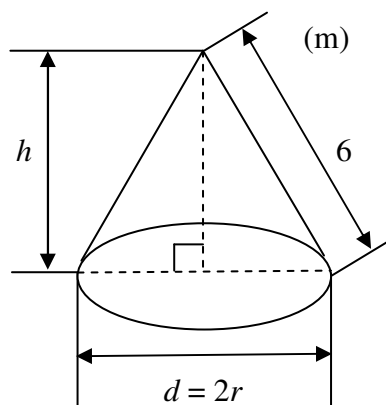
b) Är funktionen $f(x)$ deriverbar för $x = -2$ respektive $x = -1$?

3. Bestäm lokala extrempunkter samt största och minsta värde till funktionen

$$f(x) = x^2 - 4|x| \quad \text{med} \quad D_f = \{x : x \geq -1\}.$$

4. Taket till ett torn skall byggas av stavar vars längd är 6m. Tornet skall ha formen av en rät cirkulär kon. (Se figur!) Bestäm höjd och basradie för konen så att konens volym blir så stor som möjligt.

Ledning. Volymen av en kon är basytan gånger höjden delat med 3.



SVAR:

1. $y'(1) = -\frac{1}{5}$; $y''(1) = \frac{28}{125}$

2.a)

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
$\max f$	3	finns ej	finns ej	2	finns ej
$\min f$	1	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	finns ej

2.b) Ja, för $x = -2$ ($f'_-(-2) = f'_+(-2) = -1$); Nej, för $x = -1$ ($f'_-(-1) = 1 \neq f'_+(-1) = 2$)

3.

x	-1		0		2		∞
$f'(x)$	2	+	4 -4	-	0	+	∞
$f(x)$	-3	↗	0	↘	-4	↗	∞

Lok. min. i $(-1; -3)$ och $(2; -4)$. Lok. max. i $(0; 0)$.

Största värde: existerar ej! Minsta värde: $\min f = f(2) = -4$.

4. $h = 2\sqrt{3}$ m; $r = 2\sqrt{6}$ m

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ 6^2 = r^2 + h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h \text{ med } D_V = (0, 6).$$

h	(0)		$2\sqrt{3}$		(6)
$V'(h)$	12π	+	0	-	-24π
$V(h)$	0	↗	$16\pi\sqrt{3}$	↘	0

V har **lok max** i punkten $(2\sqrt{3}; 16\pi\sqrt{3})$. $h = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{6}$

$\max_{x \in D_V} V(h) = V(2\sqrt{3}) = 16\pi\sqrt{3}$. $\min_{x \in D_V} V(h)$ existerar ej!