Tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och
LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 onsdagen den 31 augusti 2012.
Tid: 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga!
Examinator: Håkan Blomqvist **Telefon:** Magnus Önnheim, tel. 0703-088304

Behandla högst en uppgift per blad! Däremot kan deluppgifter, t ex **1a** och **1b** behandlas på samma blad. Lösningarna skall vara fullständigt redovisade och svaren fullständigt förenklade! Tentamen omfattar 8 uppgifter och totalt 50 p.
För godkänt krävs minst 20p. Resultatet meddelas via LADOK.
Tentamina återlämnas och granskas vid Matematiska vetenskapers studieexpedition, måndag till fredag, kl 8.30-13.00. Klagomål på rättningen skall lämnas skriftligt.

Teori

1. Definiera följande begrepp:

a) invers smatris **b)** ON-bas i rummet **c)** högersystem (1p+1p+1p)

2. Beräkna $\boldsymbol{e}_x \bullet \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_x \bullet \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x$ och $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z$.då $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ är en ONH-bas,
med hjälp av definitionerna för skalärprodukt respektive vektorprodukt. (2p)

3.a) Bevisa att om matriserna **A** och **B** kommuterar, så är **A** och **B** kvadratiska och av samma typ. (2p)

b) Visa att avståndet d från punkten P_1 med ortsvektorn $\boldsymbol{r}_1$ till den räta linjen L
med ekvationen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$, ges av formeln $d = \dfrac{|\,\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,|}{|\,\boldsymbol{v}\,|}$. (3p)

Problem

4. En rät linje $y = kx + m$ skall anpassas till punkterna (1; 1), (2; 1), (3; 1) och (4; 2).
med minsta kvadratmetoden.

a) Visa att det utjämnade linjära ekvationssystem som ger den bästa lösningen
i minsta kvadratmetodens mening är (ESU) $\begin{cases} 30\hat{k} + 10\hat{m} = 14 \\ 10\hat{k} + 4\hat{m} = 5 \end{cases}$. (2,5p)

b) Bestäm den anpassade linjens ekvation genom att lösa ESU med Cramers regel. (1,5p)

c) Lös ESU genom att genom att använda matrisformen av ESU och metoden med invers matris. (1,5p)

d) Lös ESU med eliminationsmetoden på matrisform. (1,5p)

OBS! Uppgifterna 5 – 8 finns på nästa sida.

5. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Avgör vilken av formlerna $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ respektive $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ som inte är korrekt genom att beräkna $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ och $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. (1,5p)

b) Lös matrisekvationssystemet $\begin{cases} 2\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{E} \\ \mathbf{AX} + \mathbf{BY} = \mathbf{C} \end{cases}$ där **E** är enhetsmatrisen. (4,5p)

6. Lös, för alla värden på parametern a för vilka lösningar existerar, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ \qquad 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + ax_4 = a+4 \end{cases}$$

Använd eliminationsmetoden på matrisform. (5p)

7. För två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ gäller att $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ och att $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 6$.
$\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ spänner upp en triangel. Beräkna med vektoralgebra

a) Triangelns omkrets. **b)** Triangelns vinklar. **c)** Triangelns area. (2p+4p+1p)

8. I ett ONH-system är Π planet $2x + 2y - z + 18 = 0$,
L är den räta linjen $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{7}$ och Q är punkten (4; 5; 9).

a) Beräkna vinkeln mellan planet Π och den räta linjen L. (3p)

b) Ange en punkt som ligger i planet Π. (0,5p)

c) Visa att punkten Q ligger på linjen L. (1p)

d) I vilken punkt skär linjen L planet Π? (2p)

e) Beräkna avståndet från punkten Q till planet Π. (2p)

f) Beräkna projektionen av punkten Q på planet Π. (3p)

g) Beräkna spegelbilden av linjen L i planet Π. (3,5p)