Lösningar till tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 onsdagen den 31 augusti 2012.

4. En rät linje $y = kx + m$ skall anpassas till punkterna (1; 1), (2; 1), (3; 1) och (4; 2). med minsta kvadratmetoden.

a) Visa att det utjämnade linjära ekvationssystem som ger den bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening är (ESU) $\begin{cases} 30\hat{k} + 10\hat{m} = 14 \\ 10\hat{k} + 4\hat{m} = 5 \end{cases}$. (2,5p)

Lösning:

Insättning av punkterna i linjens ekvation $y = kx + m$ ger

$$(\mathbf{ES})\ \begin{cases} k + m = 1 \\ 2k + m = 1 \\ 3k + m = 1 \\ 4k + m = 2 \end{cases} \quad \text{eller på matrisform} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$(\mathbf{ESU})\ \mathbf{A^T A \hat{x}} = \mathbf{A^T b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 30\hat{k} + 10\hat{m} \\ 10\hat{k} + 4\hat{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 30\hat{k} + 10\hat{m} = 14 \\ 10\hat{k} + 4\hat{m} = 5 \end{cases}$$

b) Bestäm den anpassade linjens ekvation genom att lösa ESU med Cramers regel. (1,5p)

Lösning:

$$\det(\mathbf{A^T A}) = \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 30 \cdot 4 - 10 \cdot 10 = 20 \neq 0$$

$$\det(\mathbf{A^T A})_1 = \begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 5 \cdot 10 = 6, \ \det(\mathbf{A^T A})_2 = \begin{vmatrix} 30 & 14 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 30 \cdot 5 - 14 \cdot 10 = 10$$

$$\hat{k} = \frac{\det(\mathbf{A^T A})_1}{\det(\mathbf{A^T A})} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, \ \hat{m} = \frac{\det(\mathbf{A^T A})_2}{\det(\mathbf{A^T A})} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \quad \textbf{SVAR: } y = \hat{k}x + \hat{m} = \tfrac{3}{10}x + \tfrac{1}{2}$$

c) Lös ESU genom att genom att använda matrisformen av ESU och metoden med invers matris. (1,5p)

Lösning:

$$\textbf{SVAR: } \mathbf{x}=(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b})=\tfrac{1}{20}\begin{bmatrix}4 & -10\\ -10 & 30\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}14\\ 5\end{bmatrix}=\tfrac{1}{20}\begin{bmatrix}6\\ 10\end{bmatrix}=\tfrac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

d) Lös ESU med eliminationsmetoden på matrisform. (1,5p)

$$\mathbf{M}=\left[\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\,\middle|\,\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix}30 & 10 & 14\\ 10 & 4 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}10 & 4 & 5\\ 30 & 10 & 14\end{bmatrix}\boxed{\tfrac{1}{10}}\sim\begin{bmatrix}1 & \frac{4}{10} & \frac{5}{10}\\ 30 & 10 & 14\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & \frac{4}{10} & \frac{5}{10}\\ 30 & 10 & 14\end{bmatrix}\boxed{-30}\sim\begin{bmatrix}1 & \frac{4}{10} & \frac{5}{10}\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\boxed{-\tfrac{1}{2}}\sim\begin{bmatrix}1 & \frac{4}{10} & \frac{5}{10}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\boxed{-\tfrac{4}{10}}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{3}{10}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

5. Låt $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ och $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

a) Avgör vilken av formlerna $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ respektive $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ som inte är korrekt genom att beräkna $(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ och $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. (1,5p)

Lösning:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 11\end{bmatrix}\Rightarrow(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 11\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 3\\ 20 & 7\end{bmatrix}\neq(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 8 & 11\end{bmatrix}=(\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}\quad \textbf{SVAR: } (\mathbf{AB})^{\mathbf{T}}=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

b) Lös matrisekvationssystemet $\begin{cases}2\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{E}\\ \mathbf{AX} + \mathbf{BY} = \mathbf{C}\end{cases}$ där $\mathbf{E}$ är enhetsmatrisen. (4,5p)

Lösning:

$2\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{E}\Leftrightarrow\mathbf{Y}=\mathbf{E}-2\mathbf{X}$ insatt i $\mathbf{AX}+\mathbf{BY}=\mathbf{C}$ ger att

$$\mathbf{AX}+\mathbf{B}(\mathbf{E}-2\mathbf{X})=\mathbf{C}\Leftrightarrow\mathbf{AX}+\mathbf{B}-2\mathbf{BX}=\mathbf{C}\Leftrightarrow\mathbf{AX}-2\mathbf{BX}=\mathbf{C}-\mathbf{B}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{B})\mathbf{X}=\mathbf{C}-\mathbf{B}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}-2\mathbf{B})\mathbf{X}=(\mathbf{A}-2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C}-\mathbf{B})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{X}=(\mathbf{A}-2\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{C}-\mathbf{B})$$

$$\textbf{SVAR: } \mathbf{X}=-\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{Y}=\mathbf{E}-2\mathbf{X}=\begin{bmatrix}3 & \frac{2}{3}\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

6. Lös, för alla värden på parametern a för vilka lösningar existerar, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + ax_4 = a+4 \end{cases}$$

Använd eliminationsmetoden på matrisform. (5p)

Lösning:

$$\mathbf{M}=[\mathbf{A}|\mathbf{B}]=\begin{bmatrix}1&2&2&3&5\\0&2&6&8&4\\1&1&-1&a&a+4\end{bmatrix}\begin{matrix}\boxed{-1}\\ \boxed{\tfrac{1}{2}}\\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&3&5\\0&1&3&4&2\\0&-1&-3&a-3&a-1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \boxed{-2}\ \boxed{1}\\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-4&-5&1\\0&1&3&4&2\\0&0&0&a+1&a+1\end{bmatrix}\begin{matrix}a\neq-1\\ \\ \boxed{\tfrac{1}{a+1}}\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-4&-5&1\\0&1&3&4&2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \boxed{-4}\ \boxed{5}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-4&0&6\\0&1&3&0&-2\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\ \text{varav}\ \begin{cases}x_1-4x_3 = 6\\ x_2+3x_3 = -2\\ x_4 = 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = 6+4x_3\\ x_2 = -2-3x_3\\ x_4 = 1\end{cases}$$

Fall 1: $a\neq-1$

$$\begin{cases}x_1 = 6+4t\\ x_2 = -2-3t\\ x_3 = t\\ x_4 = 1\end{cases}\qquad f=n-b=4-3=1>0\Rightarrow \text{ES har oändligt många lösningar}$$

Fall 2: $a=-1$

$$\mathbf{M}\sim\begin{bmatrix}1&0&-4&-5&1\\0&1&3&4&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\ \text{varav}\ \begin{cases}x_1-4x_3-5x_4 = 1\\ x_2+3x_3+4x_4 = 2\\ 0 = 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1 = 1+4x_3+5x_4\\ x_2 = 2-3x_3-4x_4\\ 0 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1 = 1+4u+5v\\ x_2 = 2-3u-4v\\ x_3 = u\\ x_4 = v\end{cases}\qquad f=n-b=4-2=2>0\Rightarrow \text{ES har oändligt många lösningar}$$

7. För två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ gäller att $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ och att $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 6$.
$\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ spänner upp en triangel. Beräkna med vektoralgebra

a) Triangelns omkrets. **b)** Triangelns vinklar. **c)** Triangelns area. (2p+4p+1p)

Lösning:

a) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \bullet (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 = 13$

SVAR: Triangelns omkrets: $P = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = 7 + \sqrt{13}$ le

b) $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\theta \Rightarrow \theta = \arccos \dfrac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 - \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 10$

Vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ är: $v = \arccos \dfrac{\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|} = \arccos \dfrac{10}{4 \cdot \sqrt{13}} = \arccos \dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

SVAR: Triangelns vinklar är $\frac{\pi}{3}$, $\arccos \frac{5\sqrt{13}}{26}$ och $(\pi - \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{5\sqrt{13}}{26} =) \frac{2\pi}{3} - \arccos \frac{5\sqrt{13}}{26}$

c) SVAR: Triangelns area: $T = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ ae

8. I ett ONH-system är Π planet $2x + 2y - z + 18 = 0$,
L är den räta linjen $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-2}{7}$ och Q är punkten (4; 5; 9).

a) Beräkna vinkeln mellan planet Π och den räta linjen L. (3p)

Lösning:

Π har normalvektorn $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och L har riktningsvektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Om φ är vinkeln mellan L och Π och θ är vinkeln mellan L och $\boldsymbol{n}$ gäller att $\theta + \varphi = 90^\circ$.

Definitionen av skalärprodukt och formeln för komplementvinkeln ger

$$\frac{\pm \boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} = \cos\theta = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{\pm \boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|} \quad \text{varav}$$

SVAR: $\varphi = \arcsin \dfrac{\pm(2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \arcsin \dfrac{9}{\sqrt{9}\sqrt{81}} = \arcsin \dfrac{1}{3} \approx 19{,}5^\circ$

b) Ange en punkt som ligger i planet Π. (0,5p)

Lösning:

Välj t. ex. $x = y = 0$ vilket insatt i planets ekvation ger att $z = 18$. **SVAR:** $(0;0;18)$

c) Visa att punkten Q ligger på linjen L. (1p)

Lösning:

$$\mathrm{L}: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{7} = t \Rightarrow \mathrm{L}: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 7t \end{cases} \text{ Ins. Av Q:s koord. ger } \begin{cases} 4 = 4t \\ 5 = 1 + 4t \\ 9 = 2 + 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

d) I vilken punkt skär linjen L planet Π? (2p)

Insättning av L:s ekv. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$ i Π:s ekv. $2x + 2y - z + 18 = 0$ ger

$$0 = 2x + 2y - z + 18 = 2(4t) + 2(1 + 4t) - (2 + 7t) + 18 = 9t + 18 \Rightarrow t = -2$$

SVAR: Skärningspunkten $\mathrm{S} = (4(-2); 1 + 4(-2);\ 2 + 7(-2)) = (-8; -7; -12)$

e) Beräkna avståndet från punkten Q till planet Π. (2p)

Lösning:

SVAR: $d = \dfrac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|2x_Q + 2y_Q - z_Q + 18|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 9 + 18|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3\,\text{le}$

f) Beräkna projektionen av punkten Q på planet Π. (3p)

Lösning:

En linje $\mathrm{L}_\perp$ som är vinkelrät mot planet Π och går genom Q har ekvationen

$$\mathrm{L}_\perp : \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overrightarrow{OQ} + t\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2s \\ 5 + 2s \\ 9 - s \end{bmatrix}$$

Projektionspunkten Q_{proj} är skärningspunkten för $\mathrm{L}_\perp$ och Π och erhålles genom att kombinera linjens och planets ekvationer. Insättning av ekv. för $\mathrm{L}_\perp$ i ekv. för Π ger:

$$0 = 2x + 2y - z + 18 = 2(4 + 2s) + 2(5 + 2s) - (9 - s) + 18 = 9s + 9 = 0 \Rightarrow s = -1$$

SVAR: $\mathrm{Q}_{proj} = (4 + 2s;\ 5 + 2s;\ 9 - s) = (2; 3; 10)$

Alternativt: En enhetsvektor med samma riktning som $\boldsymbol{n}$ är $\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}$.

$$\boldsymbol{r}_{proj} = \overrightarrow{OQ} - d\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} - 3\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

g) Beräkna spegelbilden av linjen L i planet Π. (3,5p)

Lösning:

Den sökta spegelbilden är en linje L_{sp} som går genom skärningspunkten $S = (-8; -7; -12)$ för L och Π samt spegelbilden Q_{sp} av Q i Π.

$$\boldsymbol{r}_{spegel} = \boldsymbol{r}_Q + 2\overrightarrow{QQ}_{proj} = \boldsymbol{r}_Q + 2(\boldsymbol{r}_{proj} - \boldsymbol{r}_Q) = 2\boldsymbol{r}_{proj} - \boldsymbol{r}_Q = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Spegelpunkten $Q_{sp} = (0;\ 1;\ 11)$

En vektor parallell med L_{sp} är

$$\boldsymbol{r}_{spegel} - \boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 23 \end{bmatrix}$$

SVAR: L_{sp}: $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 23 \end{bmatrix}$