Lösningar till tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 onsdagen den 7 mars 2012.
Tid: 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga! **Examinator:** Håkan Blomqvist

3. Låt ES vara ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + ay + z = a^2+1 \\ 3x - 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$.

a) Beräkna $\det \mathbf{A}$ där $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen till ES, och avgör, med hjälp av resultatet, för vilka värden på a som $\mathbf{A}$ är inverterbar. (2p)

Lösning:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - a\cdot 5 + 5 = -5(a+1)$$

SVAR: $\mathbf{A}^{-1}$ existerar $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow -5(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

b) Beräkna x med Cramers regel, för de värden på a för vilka detta är möjligt. (2p)

Lösning:

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} a^2+1 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a^2+1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5a^2 - 5a = -5a(a+1)$$

SVAR: $x = \dfrac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \dfrac{-5a(a+1)}{-5(a+1)} = a$ för $a \neq -1$.

c) Lös, med eliminationsmetoden på matrisform, ES för $a = -1$. (2p)

Lösning:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \boxed{-3}\ \boxed{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1/5} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1}\ \boxed{3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{varav} \quad \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

$f = n - b = 3 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow$ ES har oändligt många lösningar

4. Låt $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{bmatrix}$ och $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

a) Beräkna $\mathbf{B}^{-1}$. (2p)

a) $$[\mathbf{B}|\mathbf{E}]=\left[\begin{array}{rrrrrr}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\ \boxed{1}\ \boxed{-3} \sim \left[\begin{array}{rrrrrr}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]\ \boxed{-1} \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]\ \boxed{-1}\ \boxed{-4} \sim \left[\begin{array}{rrrrrr}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -11 & 1 & 4\end{array}\right]\ \boxed{1}\ \boxed{-1} \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 11 & -1 & -4\end{array}\right]=[\mathbf{E}|\mathbf{B}^{-1}] \qquad \textbf{SVAR: } \mathbf{B}^{-1}=\left[\begin{array}{rrr}-2 & 0 & 1\\ -8 & 1 & 3\\ 11 & -1 & -4\end{array}\right]$$

b) Kontrollera svaret i **4a** med hjälp av inversens definition. (1p)

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}=\left[\begin{array}{rrr}-2 & 0 & 1\\ -8 & 1 & 3\\ 11 & -1 & -4\end{array}\right]\left[\begin{array}{rrr}1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

c) Lös matrisekvationen **AXB** – 2**C=XB.** (4p)

$$\mathbf{AXB}-2\mathbf{C}=\mathbf{XB}\Leftrightarrow \mathbf{AXB}-\mathbf{XB}=2\mathbf{C}\Leftrightarrow \mathbf{AXB}-\mathbf{EXB}=2\mathbf{C}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{XB}=2\mathbf{C}$$

Vi vet att $\mathbf{B}^{-1}$ existerar. Om även $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$ existerar, kan vi lösa ut $\mathbf{X}$ genom att multiplicera från höger med $\mathbf{B}^{-1}$ och från vänster med $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$.

$$\det(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0\cdot 2-2\cdot 2=-4\neq 0\Rightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\text{existerar.}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=\tfrac{1}{-4}\left[\begin{array}{rr}2 & -2\\ -2 & 0\end{array}\right]=\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{rr}-1 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right]$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{XB}=2\mathbf{C}\Leftrightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{XBB}^{-1}=2(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\Leftrightarrow\mathbf{X}=2(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$$

Typinspektion: $\mathit{typ}\mathbf{X}=(2\times 2)(2\times 3)(3\times 3)=2\times 3$

$$X=2\cdot\tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{rr}-1 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{rrr}-2 & 0 & 1\\ -8 & 1 & 3\\ 11 & -1 & -4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{rr}-1 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{rrr}-1 & 0 & 1\\ -7 & 1 & 3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{rrr}-6 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

5. Låt ES vara ekvationssystemet $\begin{cases} px+2y = 2 \\ x+y = 1 \\ x+py = 2 \end{cases}$

a) Lös ekvationssystemet ES för de värden på parametern p för vilka ES har lösningar. Använd eliminationsmetoden på matrisform. (4p)

Lösning:

$$\mathbf{M}=\left[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}\right]=\begin{bmatrix} p & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 2 & 2 \\ 1 & p & 2 \end{bmatrix} \boxed{-p}\ \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-p & 2-p \\ 0 & p-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p\neq 2 \\ \boxed{\tfrac{1}{2-p}} \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & p-1 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-1}\ \boxed{1-p} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-p \end{bmatrix} \boxed{\tfrac{1}{2-p}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 1: $p \neq 2$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$

ES saknar lösning!

Pivotelementet i rad 3 står **sist** i raden.

Fall 2: $p = 2$

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-p & 2-p \\ 0 & p-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad f = n - b = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \text{ES har entydig lösning}$$

b) I fallet $p=1$ saknar ES exakt lösning. Lös för $p=1$ ekvationssystemet ES approximativt med minsta kvadratmetoden och beräkna medelfelet. (5p)

Lösning:

$$(\mathbf{ES})\ \begin{cases} x+2y &= 2 \\ x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{cases} \text{ har matrisformen } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls ur

$$(\mathbf{ESU})\ \ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

varav

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}) = \tfrac{1}{3\cdot 6-4\cdot 4}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \ \text{ så att } \begin{cases} \hat{x} = 1 \\ \hat{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

och

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \hat{x}+2\hat{y}-2 \\ \hat{x}+\hat{y}-1 \\ \hat{x}+\hat{y}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{2}{2}-2 \\ 1+\frac{1}{2}-1 \\ 1+\frac{1}{2}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet blir

$$\eta = \tfrac{|\mathbf{f}|}{\sqrt{m}} = \tfrac{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}{2\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}41$$

6. För vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ gäller att $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 4$. Det gäller också att $\theta = \arccos\frac{1}{4}$ där θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.

a) Beräkna $|2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. (2p)

Lösning:

$$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\bullet(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = (2\boldsymbol{a})\bullet(2\boldsymbol{a}) - (2\boldsymbol{a})\bullet\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\bullet(2\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{b} =$$

$$= 4\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{b} = 4|\boldsymbol{a}|^2 - 4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta + |\boldsymbol{b}|^2 = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2\cdot 4\cdot\tfrac{1}{4} + 4^2 = 24$$

SVAR: $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = \sqrt{24} = \sqrt{4\cdot 6} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b) Beräkna vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. (2p)

Lösning:

Definitionen av skaläprodukt ger att $\boldsymbol{a}\bullet(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\cdot|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cos v$ där

$$\boldsymbol{a}\bullet(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = 2|\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 4\cdot\tfrac{1}{4} = 6$$

SVAR: $v = \arccos\dfrac{\boldsymbol{a}\bullet(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|} = \arccos\dfrac{6}{2\cdot 2\sqrt{6}} = \arccos\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 2\sqrt{6}} = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

c) Beräkna $|(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|$. ($\theta = \arccos\frac{1}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$) (2p)

Lösning:

$$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{a} + (2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} =$$

$$= 2\boldsymbol{0} + 3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{0} = 3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

SVAR: $|(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})| = |3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |3||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = 3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = 3\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = 6\sqrt{15}$

7. I ett ONH-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (3; 1; 1) C = (4; 1; 5) och D = (−1; 2; 4) givna.

a) Beräkna $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (1,5p)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_x - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z = 4\boldsymbol{e}_x - 8\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) Visa att ekvationen för det plan Π som innehåller punkterna A, B och C är $4x - 8y - z - 3 = 0$. (1,5p)

Normalvektorn för planet Π är parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Välj t ex $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{r}_o = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ekvationen för planet Π blir då

$$\boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1) - 8y - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 - 8y - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 8y - z - 3 = 0$$

c) Beräkna höjden i tetraedern ABCD genom att beräkna arean av triangeln ABC och volymen av tetradern ABCD samt sedan använda formeln $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot T_{ABC} \cdot h$. (2p)

$$T_{ABC} = \tfrac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{81} = \tfrac{1}{2} \cdot 9 = \tfrac{9}{2}$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-2) + (-8) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = -27$$

$$V_{ABCD} = \pm \tfrac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = \pm \tfrac{1}{6} (-27) = -\tfrac{1}{6} (-27) = \tfrac{9}{2} \text{ ve}$$

$$V_{ABCD} = \tfrac{1}{3} T_{ABC} h \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{T_{ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{9}{2}}{\frac{9}{2}} = 3 \text{ le}$$

d) Beräkna höjden i tetraedern ABCD genom att först beräkna projektionen D_{proj} av punkten D på planet Π och sedan beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{DD}_{proj}$. (3p)

Lösning:

En linje $L_\perp$ som är vinkelrät mot planet Π och går genom D har ekvationen

$$L_\perp : \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overrightarrow{OD} + t\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4t \\ 2-8t \\ 4-t \end{bmatrix}$$

Projektionspunkten D_{proj} är skärningspunkten för $L_\perp$ och Π och erhålles genom att kombinera linjens och planets ekvationer. Insättning av ekv. för $L_\perp$ i ekv. för Π ger:

$$4x - 8y - z - 3 = 0 \Leftrightarrow 4(-1+4t) - 8(2-8t) + t - (4-t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 81t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = \tfrac{1}{3}$$

$$D_{proj} = (-1+4t;\, 2-8t;\, 4-t) = (-1+\tfrac{4}{3};\, 2-\tfrac{8}{3};\, 4-\tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3};\, -\tfrac{2}{3};\, \tfrac{11}{3})$$

$$\overrightarrow{DD}_{proj} = \overrightarrow{OD}_{proj} - \overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{DD}_{proj}\right| = \tfrac{1}{3}\left\|\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}\right\| = \tfrac{1}{3}\cdot 9 = 3 \text{ le}$$

8. Låt Π_1 vara planet $2x + y - 2z - 7 = 0$, låt Π_2 vara planet $x - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}y$ och låt L vara linjen $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$.

a) Visa att planen Π_1 och Π_2 är parallella. (1p)

LÖSNING:

Planens ekvationer på koordinatform är $\Pi_1 : 2x + y - 2z - 7 = 0$ och $\Pi_2 : x + \tfrac{1}{2}y - z - \tfrac{3}{2} = 0$.

$$\boldsymbol{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tfrac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{n}_1 \Rightarrow \boldsymbol{n}_2 \,//\, \boldsymbol{n}_1 \Rightarrow \Pi_2 \,//\, \Pi_1$$

b) Punkten M ligger på linjen L och har lika stort avstånd till båda planen.
Beräkna koordinaterna för M. (3p)

LÖSNING:

Skriv först L på parameterform. $\mathrm{L}: x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2} = t \Rightarrow \mathrm{L}: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Avstånden från Π_1 respektive Π_2 till $\mathrm{M} = (x_\mathrm{M}; y_\mathrm{M}; z_\mathrm{M}) = (t_\mathrm{M}; 2 + t_\mathrm{M}; 3 + 2t_\mathrm{M})$ ges av

$$d(\Pi_1, \mathrm{M}) = \pm \frac{2x_\mathrm{M} + y_\mathrm{M} - 2z_\mathrm{M} - 7}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \pm \frac{2t_\mathrm{M} + 2 + t_\mathrm{M} - 2(3 + 2t_\mathrm{M}) - 7}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \mp \frac{t_\mathrm{M} + 11}{3}$$

$$d(\Pi_2, \mathrm{M}) = \pm \frac{x_\mathrm{M} + \frac{1}{2} y_\mathrm{M} - z_\mathrm{M} - \frac{3}{2}}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{t_\mathrm{M} + 1 + \frac{1}{2} t_\mathrm{M} - (3 + 2t_\mathrm{M}) - \frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \mp \frac{\frac{1}{2} t_\mathrm{M} + \frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \mp \frac{t_\mathrm{M} + 7}{3}$$

$d(\Pi_1, \mathrm{M}) = d(\Pi_2, \mathrm{M}) \Rightarrow -(t_\mathrm{M} + 11) = t_\mathrm{M} + 7 \Rightarrow -2t_\mathrm{M} = 18 \Rightarrow t_\mathrm{M} = -9$ varav

$\mathrm{M} = (t_\mathrm{M}; 2 + t_\mathrm{M}; 3 + 2t_\mathrm{M}) = (-9; -7; -15)$

Alternativ lösning:

Antag att skärningspunkterna för linjen L med planen Π_1 resp. Π_2 är S_1 resp. S_2.
Då gäller att

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS_1} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{OS_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2})$$

Skärningspunkterna för L och Π_1 resp. Π_2 erhålles genom att kombinera linjens ekvationer med respektive plans ekvation enligt

$2x + y - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow 2t_1 + 2 + t_1 - 2(3 + 2t_1) - 7 = 0 \Leftrightarrow -t_1 = 11 \Leftrightarrow t_1 = -11$

$\mathrm{S}_1 = (t_1; 2 + t_1; 3 + 2t_1) = (-11; -9; -19)$

$x + \frac{1}{2} y - z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t_2 + 1 + \frac{1}{2} t_2 - (3 + 2t_2) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} t_2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow t_2 = -7$

$\mathrm{S}_2 = (t_2; 2 + t_2; 3 + 2t_2) = (-7; -5; -11)$

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2}) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -11 \\ -9 \\ -19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ -11 \end{bmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -18 \\ -14 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix} \quad \mathrm{M} = (-9; -7; -15)$$