Tentamen i matematik del B för BI 1 och Fartygsdesign och matematik del C för KI, 20070314

OBS! Uppgift 3 nedan är delad så att studenter på Kemiingenjörsprogrammet gör uppgiften märkt **KI**, medan övriga studenter gör uppgiften märkt **Ö**.

1. (a) Bevisa avståndsformeln för räta linjen, $d = \dfrac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_0})|}{|\mathbf{v}|}$. (3p)

   (b) Bevisa avståndsformeln för planet, $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. (3p)

2. Definiera rang för matris. Vad gäller för rang(A) och rang$(A|b)$ om det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ saknar lösning respektive är lösbart? Ge exempel i fallet 2×2 system. (3p)

3. **KI** Lös andragradsekvationen $z^2 - 3jz - 3 - j = 0$.

   Ö Beräkna $a, \ldots, i$ så att

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

(3 p)

4. (a) Lös ekvationsystemet.

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 1 \\ -2x + y - 4z = -1 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$$

(3 p)

   (b) Lös ekvationsystemet med minsta kvadratmetoden och beräkna medelfelet.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

(5 p)

5. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Beräkna $\mathbf{A}^{-1}$. (2p)

   (b) Lös matrisekvationen $\mathbf{X\,A} + \mathbf{B} = \mathbf{CXA}$. (3p)

OBS! Uppgifterna 6, 7 och 8 finns på nästa sida

6. (a) Förenkla $\mathbf{u} \times (\mathbf{2v} - \mathbf{u}) + \mathbf{3}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$. (2p)

   (b) Givet $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$ och $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{2b}) = 12$, beräkna vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. (3p)

   (c) I triangeln ABC låt $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Låt D vara mittpunkten på sträckan AB och E mittpunkten på sträckan CD. Uttryck $\overrightarrow{AE}$ i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. (3p)

7. (a) Bestäm på parameterform ekvation för linjen genom $(1, -2, 3)$, $(4, -2, 0)$. (1p)

   (b) Beräkna avståndet från punkten $(3, 1, 1)$ till linjen i (a). (2p)

   (c) Beräkna ekvationen för det plan π som innehåller punkterna $(4, 0, 1)$, $(5, 2, 3)$, $(-1, 6, 7)$. (3p)

   (d) Låt L_1 vara linjen genom punkterna $(a, 1, 2)$, $(-1, 0, 1)$ och L_2 linjen genom $(3, 4, 1)$, $(1, 0, 2)$. För vilket/vilka värden på a skär linjerna L_1 och L_2 varandra? (4p)

8. (a) Beräkna avståndet från punkten $P_1 = (5, -3, 1)$ till planet $\pi : \ x - 2y + 4z = -6$. (2p)

   (b) Beräkna projektionspunkten, P_{proj}, av P_1 på planet π. (2p)

   (c) Ange en annan punkt, P_2, i planet π och beräkna arean av triangeln $\mathrm{P_1 P_2 P_{proj}}$. (3p)