Lösningar till tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 torsdagen den 17 januari 2013.

3.a) Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = ax + b$ till punkterna (0; 0), (1; 1), och (4; 3). (2p)

b) Anpassa med minsta kvadratmetoden en kurva $y = a\sqrt{x} + b$ till punkterna (0; 0), (1; 1), och (4; 3). (2p)

Lösning:

3.a) Insättning av punkternas koordinater i linjens ekvation $y = ax + b$ ger

$$\textbf{(ES)}\ \begin{cases} 0a & + & 1b & = & 0 \\ 1a & + & 1b & = & 1 \\ 4a & + & 1b & = & 3 \end{cases} \text{ eller på matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles som lösning till

$$\textbf{(ESU)}\ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}) = \tfrac{1}{17\cdot 3 - 5\cdot 5}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{26}\begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{26} \\ \frac{3}{26} \end{bmatrix}$$

SVAR: $y = \hat{a}x + \hat{b} = \frac{19}{26}x + \frac{3}{26}$

3.b) Insättning av punkternas koordinater i linjens ekvation $y = a\sqrt{x} + b$ ger

$$\textbf{(ES)}\ \begin{cases} 0a & + & 1b & = & 0 \\ 1a & + & 1b & = & 1 \\ 2a & + & 1b & = & 3 \end{cases} \text{ eller på matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles som lösning till

$$\textbf{(ESU)}\ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}) = \tfrac{1}{5\cdot 3 - 3\cdot 3}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

SVAR: $y = a\sqrt{x} + b = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{6}$

c) Avgör vilken av de approximativa lösningarna i **3a** respektive **3b** som är bäst genom att beräkna medelfelen. (2p)

Lösning:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} + \hat{b} - 1 \\ 4\hat{a} + \hat{b} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} \\ \frac{19}{26} + \frac{3}{26} - \frac{26}{26} \\ \frac{76}{26} + \frac{3}{26} - \frac{78}{26} \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet blir $\eta_1 = \frac{|\mathbf{f}_1|}{\sqrt{m}} = \frac{\frac{1}{26}\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{26\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{26}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{78}}$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} + \hat{b} - 1 \\ 2\hat{a} + \hat{b} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{9}{6} - \frac{1}{6} - \frac{6}{6} \\ \frac{18}{6} - \frac{1}{6} - \frac{18}{6} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet blir $\eta_2 = \frac{|\mathbf{f}_1|}{\sqrt{m}} = \frac{\frac{1}{6}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{18}} > \frac{1}{\sqrt{78}} = \eta_1$

SVAR: Approximationen $y = \frac{19}{26}x + \frac{3}{26}$ är bäst.

4. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix}$.

a) Beräkna $\mathbf{A}^{-1}$. (2p)

Lösning:

a) $$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2}\;\boxed{-1} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-1} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \boxed{3}\;\boxed{-2} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1}]$$

SVAR: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) Lös ekvationen $\det(\mathbf{B}-\mathbf{A})=0$. (2p)

Lösning:

$$\det(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & x & 2\\ 1 & 1 & x\end{vmatrix}\boxed{1} = \begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & x+1 & 3\\ 0 & 2 & x+1\end{vmatrix} \overset{\text{utv. k}_1}{=} (-1)^{1+1}(-1)\begin{vmatrix}x+1 & 3\\ 2 & x+1\end{vmatrix}=$$

$$=-((x+1)^2-6)$$

SVAR: $\det(\mathbf{B}-\mathbf{A})=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-6=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=6 \Leftrightarrow x+1=\pm\sqrt{6} \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{6}$

c) Finns något värde på x så att **A** och **B** kommuterar?
Bestäm i så fall detta värde. (2p)

Lösning:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}6 & x+6 & x+8\\ 5 & 6 & 2x+2\\ 3 & x+2 & 6\end{bmatrix},\ \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 5\\ x+8 & 6 & 2x+2\\ x+6 & x+2 & 6\end{bmatrix}$$

SVAR: $\mathbf{BA}=\mathbf{AB} \Leftrightarrow (x+6=3)\wedge(x+8=5) \Leftrightarrow x=-3$

5. Planen $\Pi_1: 2x-y-2z=3$ och $\Pi_2: z=x-y-D$ är givna i ett ONH-system.

a) Beräkna vinkeln mellan planen Π_1 och Π_2. (2p)

Lösning:

Planens ekvationer på koordinatform är

$\Pi_1: 2x-y-2z-3=0$ och $\Pi_2: -x+y+z+D=0$.

varav följer att $\boldsymbol{n}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{n}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

$$\theta=\arccos\frac{\pm\boldsymbol{n}_1\bullet\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\arccos\frac{\pm\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\arccos\frac{\pm(-5)}{3\sqrt{3}}$$

SVAR: $\theta=\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}=\arccos\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

b) Visa att punkten A = (3; 1; 1) ligger i planet Π_1 och bestäm D så att A även ligger i planet Π_2. (1p)

Lösning:

Insättning av koordinaterna för A ekvationen för Π_1 ger

$\text{VL} = 2x - y - 2z - 3 = 2 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot 1 - 3 = 0 = \text{HL}$ **VSV**

och insättning av koordinaterna för A ekvationen för Π_2 ger

$\text{VL} = -x + y + z + D = -3 + 1 + 1 + D = -1 + D = \text{HL} = 0 \Rightarrow D = 1$

SVAR: $D = 1$

6. Lös, för alla värden på parametern p för vilka lösningar existerar, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + py + p^2 z = p \\ x + (p+1)y + (p^2+2p+1)z = p+2 \\ x + 2py + 4p^2 z = 3p \end{cases}$$

Använd eliminationsmetoden på matrisform. (7p)

Lösning:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & p \\ 1 & p+1 & p^2+2p+1 & p+2 \\ 1 & 2p & 4p^2 & 3p \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & p \\ 0 & 1 & 2p+1 & 2 \\ 0 & p & 3p^2 & 2p \end{bmatrix} \begin{matrix} p \neq 0 \\ \\ \boxed{\tfrac{1}{p}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & p & p^2 & p \\ 0 & 1 & 2p+1 & 2 \\ 0 & 1 & 3p & 2 \end{bmatrix} \boxed{-p}\ \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p^2-p & -p \\ 0 & 1 & 2p+1 & 2 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \neq 1 \\ \\ \boxed{\tfrac{1}{p-1}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p^2-p & -p \\ 0 & 1 & 2p+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-2p-1}\ \boxed{p^2+p} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fall 1: $p \neq 0,1$
(Precis en lösning.)

$$\begin{cases} x = -p \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Fall 2: $p = 1$
(z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!)

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

Fall 3: $p = 0$
(z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!)

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - s \\ z = s \end{cases}$$

7. Linjen L: $x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{2}$ och punkterna $P_1 = (\ 4;\ 4;\ 5\ )$ och $P_2 = (\ 2;\ 0;\ 9\ )$ är givna i ett ONH-system.

a) Beräkna avståndet mellan punkten P_1 och linjen L. (4p)

Lösning:

Vi använder avståndsformeln $d=\dfrac{|\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_o)|}{|\boldsymbol{v}|}$ för räta linjen.

$$x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=2+t\\ y=3+2t\\ z=4+2t\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\text{o}}+t\,\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_1=\overrightarrow{OP_1}=\begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_o=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_o=\begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$ och det följer att

$$\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_o)=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=3\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Avståndsformeln för räta linjen ger slutligen att

SVAR: $d(\mathrm{P}_1,\mathrm{L})=\dfrac{|\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_o)|}{|\boldsymbol{v}|}=\dfrac{|3|\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$ le

b) Låt L_{12} vara den räta linje som går genom punkterna P_1 och P_2.
Undersök om L_{12} skär linjen L och bestäm i så fall skärningspunkten. (3p)

Lösning:

För att bestämma ekvationen för L_{12} behöver vi en punkt på L_{12}, tag t ex P_1, och en vektor $\boldsymbol{v}_{12}$ parallell med L_{12}. Vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ är parallell med L_{12}.

Då $\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-4\\4\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$ kan vi t ex välja $\mathbf{v}_{12}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$ så att

$$\mathrm{L}_{12}:\mathbf{r}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\mathbf{r}_1+s\mathbf{v}_{12}=\begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}\ \text{varav}\ \mathrm{L}_{12}:\begin{cases}x=4+s\\ y=4+2s\\ z=5-2s\end{cases}$$

Om linjerna L_{12} och L skär varandra, (och ej sammanfaller), finns precis en punkt som uppfyller båda linjernas ekvationer. Denna punkts koordinater kan då erhållas som lösningen till det ekvationssystem, som erhålls om man kombinerar de båda linjernas ekvationer på parameterform.

Kombination av parameterformen för ekvationerna till L_{12} och L ger nu

$$\text{(ES)}\ \begin{cases} (x=) & 2+t & = & 4+s & \Leftrightarrow & t-s=-2 \\ (y=) & 3+2t & = & 4+2s & \Leftrightarrow & 2t-2s=1 \\ (z=) & 4+2t & = & 5-2s & \Leftrightarrow & 2t+2s=1 \end{cases} \quad \text{med totalmatrisen}$$

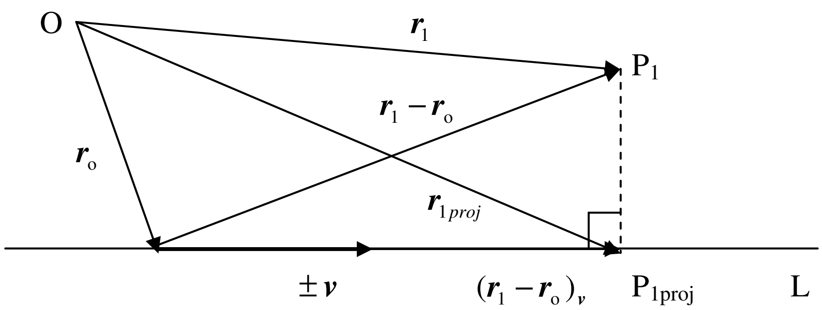
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-2} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ES saknar lösning,
ty pivotelementet i rad 2 står sist i raden.

SVAR: L_{12} skär ej L.

c) Bestäm projektionen av punkten P_1 på linjen L. (5p)

Lösning:



$$\boldsymbol{v} \bullet (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 6 > 0$$

varav följer att $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o$ bildar spetsig vinkel så att $+\boldsymbol{v}$ kan väljas i figuren ovan.

Projektionssatsen ger nu att

$$\boldsymbol{r}_{1proj} = \boldsymbol{r}_o + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o)_{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r}_o + \frac{\boldsymbol{v} \bullet (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o)}{|\boldsymbol{v}|^2}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{6}{3^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

SVAR: $P_{1proj} = (\tfrac{8}{3}; \tfrac{13}{3}; \tfrac{16}{3})$

8. För en parallellogram gäller att basen har längden 4 cm, omkretsen är 12 cm och arean är 6 cm^2.

Antag att parallellogrammen spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ och beräkna, med vektoralgebra, vinkeln mellan parallellogrammens diagonaler. (6p)

Lösning:

$|\boldsymbol{u}| = 4$. Parallellogrammens omkrets: $P = 2|\boldsymbol{u}| + 2|\boldsymbol{v}| = 12 \Rightarrow |\boldsymbol{v}| = 6 - |\boldsymbol{u}| = 2$

Antag att vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är θ.

Parallellogrammens area: $T = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{T}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \dfrac{6}{4\cdot 2} = \dfrac{3}{4}$

Vinkeln v mellan parallellogrammens diagonaler $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ erhålls med hjälp av att

$$\pm(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|\cos v \Rightarrow v = \arccos\frac{\pm(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|} \text{ där}$$

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{v}|^2 = 12$$

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|^2 + 2\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2 =$$

$$= |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 + 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta = 20 + 16\cos\theta = 4(5 + 4\cos\theta)$$

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|^2 - 2\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v} + |\boldsymbol{v}|^2$$

$$= |\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta = 4(5 - 4\cos\theta)$$

$$|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}| = \sqrt{4(5+4\cos\theta)\cdot 4(5-4\cos\theta)} = 4\sqrt{(5+4\cos\theta)\cdot(5-4\cos\theta)} =$$

$$= 4\sqrt{25 - 16\cos^2\theta} = (\text{ Trigonometriska ettan ger: } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\ ) =$$

$$= 4\sqrt{25 - 16(1-\sin^2\theta)} = 4\sqrt{9 + 16\sin^2\theta} = 4\sqrt{9 + 16\cdot\tfrac{9}{16}} = 4\sqrt{9\cdot 2} = 12\sqrt{2}$$

SVAR: $v = \arccos\dfrac{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\bullet(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|} = \arccos\dfrac{12}{12\sqrt{2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$