Tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 torsdagen den 14 mars 2013.
Tid: 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga!
Examinator: Håkan Blomqvist **Telefon:** Jakob Hultgren, tel. 0703-088304

Behandla högst en uppgift per blad! Däremot kan deluppgifter, t ex **1a** och **1b**, behandlas på samma blad. Lösningarna skall vara fullständigt redovisade och svaren fullständigt förenklade! **Tentamen omfattar 8 uppgifter** och totalt 50 p. För godkänt krävs minst 20p. Resultatet meddelas via LADOK. Tentamina återlämnas och granskas i samband med någon föreläsning under läsperiod 4. Tidpunkt och lokal meddelas på kursens hemsida. Den som inte kan delta vid granskningen kan sedan hämta och granska sin tenta på Matematiska vetenskapers studieexpedition, måndag till fredag, kl 8.30-13.00. Eventuella klagomål på rättningen skall lämnas skriftligt.

---

1. Definiera följande begrepp:

a) invers matris **b)** vektorprodukt (1p+2p)

2.a) Bevisa att om matriserna **A** och **B** kommuterar, så är **A** och **B** kvadratiska och av samma typ. (2p)

b) Visa att avståndet d från punkten P_1 med ortsvektorn $\boldsymbol{r}_1$ till den räta linjen L med ekvationen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$, ges av formeln $d = \dfrac{|\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|}{|\boldsymbol{v}|}$. (Gör figur!) (3p)

c) Härled ekvationen för planet på formen $Ax + By + Cz + D = 0$. (2p)

3.a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

approximativt med minsta kvadratmetoden. (4p)

b) Beräkna felvektor och medelfel för lösningen i **3a**. (2p)

4.a) Lös (ES) $\begin{cases} 2x + 2y - az = a \\ x + y - z = 1 \\ ax + (a+1)y + (1-a)z = a \end{cases}$

för alla värden på parametern a för vilka lösningar existerar, genom att överföra ekvationssystemets totalmatris till reducerad form. (6p)

b) Bestäm rangen för ekvationssystemets totalmatris. (1p)

c) Lös ES med Cramers regel för de värden på parametern a för vilka detta är möjligt. (3p)

OBS! Problemen 5 – 8 finns på nästa sida.

5. Låt $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Beräkna $\mathbf{B}^{-1}$ (2p)

b) Beräkna $\mathbf{CB}^{-1}$ (1p)

c) Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ (2p)

d) Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3p)

6. Antag att $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ bildar en ONH-bas. Beräkna

a) $(\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z) \times (3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_z)$. (2p)

b) $\left| \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \right|$. (2p)

(Uppgifterna **6ab** skall lösas med hjälp av definitionerna och räknelagarna för vektor- respektive skalärprodukt. Du får inte använda komponentformen av basvektorerna.)

7. I ett ONH-system system är planet $\Pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$ och

linjen L: $\dfrac{x-1}{2} = y + 2 = z - 3$ givna.

a) Ange en punkt som ligger i planet Π. (0,5p)

b) Visa att punkten Q = (5; 0; 5) ligger på linjen L och beräkna avståndet från planet Π till punkten Q. (2,5p)

c) I vilken punkt skär linjen L planet Π? (2p)

8. I ett ONH-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 3), C = (3; 0; 1) givna. Π_1 är planet $kx + 2y + 6z + 4 = 0$, där k är en konstant, och Π_2 är det plan som går genom punkterna A, B och C.

a) Beräkna arean av triangeln ABC. (2p)

b) Beräkna den minsta vinkel som planet Π_1 kan bilda med planet Π_2. (5p)