Tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och
LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 torsdagen den 16 januari 2014.

Tid: 8.30 - 12.30 **Hjälpmedel:** Inga!

Examinator: Håkan Blomqvist **Telefon:** John Bondestam Malmberg, tel. 0703-088304

Behandla högst en uppgift per blad! Däremot kan deluppgifter, t ex **1a** och **1b** behandlas på samma blad. Lösningarna skall vara fullständigt redovisade och svaren fullständigt förenklade! **Tentamen omfattar 8 uppgifter** och totalt 50 p. För godkänt krävs minst 20p. Resultatet meddelas via LADOK.
Efter det att resultatet meddelats återlämnas och granskas tentamina vid Matematiska vetenskapers studieexpedition, måndag till fredag, kl 8.30-13.00.
Eventuella klagomål på rättningen skall lämnas skriftligt.

Teori

1. Definiera följande begrepp:

a) rang **b)** högersystem **c)** vektorprodukt (0,5p+1p+1,5p)

2. Bevisa att

a) om matriserna **A** och **B** kommuterar,
så är **A** och **B** kvadratiska och av samma typ. (2p)

b) arean av triangeln ABC ges av formeln:

$$T_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|. \qquad (1p)$$

c) volymen av tetraedern ABCD ges av formeln:

$$V_{ABCD} = \pm\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AD}\,. \quad \text{(Gör figur!)} \qquad (4p)$$

Problem

3. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y - kz = k \\ x + y - z = 1 \\ kx + (k+1)y + (1-k)z = k \end{cases}.$$

a) Lös, med Cramers regel, ekvationssystemet ES för $k \neq 1$ (3p)

b) Lös, med eliminationsmetoden på matrisform, ekvationssystemet ES för $k = 1$. (3p)

c) Skriv ekvationssystemet ES som en matrisekvation och lös, för $k \neq 1$,
matrisekvationen med hjälp av inversen för koefficientmatrisen. (3p)

OBS! Uppgifterna 4 -8 finns på nästa sida.

4. Anpassa med minsta kvadratmetoden kurvan $y = ax^2 + b$ till punkterna $(-1;\ 1\ )$, $(\ 0;\ 0\ )$, $(\ 1;\ 1\ )$ och $(\ 2;\ 3\ )$ och beräkna medelfelet. (5p)

5. För vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ gäller att $|\,\boldsymbol{u}\,| = 2$ och att $|\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\,| = \sqrt{7}$.

Det gäller också att vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är 60°.

Beräkna $|\,\boldsymbol{v}\,|$ och vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. (4p)

6. Bestäm rangen av matrisen $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 2 & p+3 & 2 \\ 2 & p+3 & p+3 \\ 1 & p+q & p+q \end{bmatrix}$ för alla värden på p och q. (6p)

7. Beräkna avståndet från punkten $(\ 1;\ 3;\ -5\ )$ till

a) planet $z = 2 - x + 2y$. (2p)

b) linjen $\dfrac{x-1}{2} = y;\ z = 1.$. (3p)

8. I ett ON-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (3; 1; 1), C = (3; 2; 2), D = $(\ a+1;\ a\ ;\ 5\ )$ och E = (1;6; 1) givna.

Π är det plan som går genom punkterna A, B och C. L är den linje som går genom punkterna D och E.

a) Beräkna $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AD}$. (2p)

b) Bestäm konstanten a så att volymen för tetraedern ABCD blir $\frac{1}{3}$ *ve*. (2p)

c) Avgör för vilka värden på a som $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ bildar ett högersystem. (1p)

d) Finns något värde på konstanten a för vilket linjen L inte skär planet Π? Bestäm i så fall detta värde på a. (3p)

e) Finns det något värde på talet a sådant att linjen L är vinkelrät mot planet Π? Bestäm i så fall detta värde på a. (3p)