Lösningar till tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 torsdagen den 16 januari 2014.

3. Låt ES vara ekvationssystemet $\begin{cases} x + y - kz = k \\ x + y - z = 1 \\ kx + (k+1)y + (1-k)z = k \end{cases}$.

a) Lös, med Cramers regel, ekvationssystemet ES för $k \neq 1$ (3p)

b) Lös, med eliminationsmetoden på matrisform, ekvationssystemet ES för $k = 1$. (3p)

c) Skriv ekvationssystemet ES som en matrisekvation och lös, för $k \neq 1$, matrisekvationen med hjälp av inversen för koefficientmatrisen. (3p)

Lösning:

3.a) $$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & 1 & -1 \\ k & k+1 & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k+1 & 1-k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1-k \end{vmatrix} + (-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1-k+k+1-(1-k+k)-k(k+1-k) = 2-1-k = 1-k$$

Lösning med hjälp av Cramers regel existerar $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow 1-k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1$

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} k & 1 & -k \\ 1 & 1 & -1 \\ k & k+1 & 1-k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k+1 & 1-k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1-k \end{vmatrix} + (-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k+1 \end{vmatrix} =$$

$$= k(1-k+k+1)-(1-k+k)-k(k+1-k) = 2k-1-k = k-1$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & k & -k \\ 1 & 1 & -1 \\ k & k & 1-k \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1-k \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1-k \end{vmatrix} + (-k)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} = 1-k$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & k+1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k+1 & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k+1 \end{vmatrix} = -1+k = k-1$$

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{k-1}{1-k} = \frac{k-1}{-(k-1)} = -1,\quad y = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{1-k}{1-k} = 1,\quad z = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{k-1}{1-k} = -1$$

3.b) För $k = 1$ erhålls att

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x - 2z & = & 1 \\ y + z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{cases}$$

z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!

3.c) ES $\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -k \\ 1 & 1 & -1 \\ k & k+1 & 1-k \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ k \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$. Jacobis metod ger att

$$[\mathbf{A}|\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ k & k+1 & 1-k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -k & 1 & 0 & 0 \\ k & k+1 & 1-k & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-1} \; \boxed{-k} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -k & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 0 & 1-k & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k \neq 1 \\ \\ \boxed{\tfrac{-1}{k-1}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1} \; \boxed{2} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{k-1} & \frac{k^2+1}{k-1} & \frac{1-k}{k-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k-1} & \frac{-k^2+k-1}{k-1} & \frac{k-1}{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & \frac{0}{k-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}] \text{ varav } \mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{k-1} \begin{bmatrix} -2 & k^2+1 & 1-k \\ 1 & -k^2+k-1 & k-1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

För $k \neq 1$ existerar alltså $\mathbf{A}^{-1}$ och det följer att

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Ex} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

varav

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \tfrac{1}{k-1} \begin{bmatrix} -2 & k^2+1 & 1-k \\ 1 & -k^2+k-1 & k-1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ k \end{bmatrix} = \tfrac{1}{k-1} \begin{bmatrix} -(k-1) \\ k-1 \\ -(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. Anpassa med minsta kvadratmetoden kurvan $y = ax^2 + b$ till punkterna $(-1;\,1)$, $(0;\,0)$, $(1;\,1)$ och $(2;\,3)$ och beräkna medelfelet. (5p)

Lösning:

Insättning av punkternas koordinater ger oss ekvationssystemet

$$(\mathbf{ES})\ \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 0 \\ a + b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \quad \text{eller på matrisform} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$(\mathbf{ESU})\ \ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \ \text{varav}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}) = \tfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 26 \\ 6 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Felvektorn

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b - 1 \\ b \\ a + b - 1 \\ 4a + b - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{18} + \frac{3}{18} - \frac{18}{18} \\ \frac{0}{18} + \frac{3}{18} + \frac{0}{18} \\ \frac{13}{18} + \frac{3}{18} - \frac{18}{18} \\ \frac{52}{18} + \frac{3}{18} - \frac{54}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{18} \\ \frac{3}{18} \\ -\frac{2}{18} \\ \frac{1}{18} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{|\mathbf{f}\,|}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 1^2}}{18\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{18}}{36} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}12$$

SVAR: $y = \frac{13}{18}x^2 + \frac{1}{6}$ och $\eta = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}12$

5. För vektorerna $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ gäller att $|\boldsymbol{u}| = 2$ och att $|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| = \sqrt{7}$.

Det gäller också att vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är 60°.

Beräkna $|\boldsymbol{v}|$ och vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. (4p)

Lösning:

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|^2 - 2|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta + |\boldsymbol{v}|^2$$

ger att

$$(\sqrt{7})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \tfrac{1}{2} + |\boldsymbol{v}|^2 \Leftrightarrow |\boldsymbol{v}|^2 - 2|\boldsymbol{v}| - 3 = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{v}| = 1 \pm 2$$

och, eftersom $|\boldsymbol{v}| \geq 0$, följer att $|\boldsymbol{v}| = 1 + 2 = 3$.

Om vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ är φ följer att

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|\cos\varphi = \boldsymbol{u} \bullet (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta \text{ varav}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}|^2 - |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|} = \frac{2^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$$

6. Bestäm rangen av matrisen $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 2 & p+3 & 2\\ 2 & p+3 & p+3\\ 1 & p+q & p+q\end{bmatrix}$ för alla värden på p och q. (5p)

Lösning:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 2 & p+3 & 2\\ 2 & p+3 & p+3\\ 1 & p+q & p+q\end{bmatrix}\begin{array}{l}\boxed{-2}\ \boxed{-1}\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & -p-1 & -2p-2\\ 0 & -p-1 & -p-1\\ 0 & q-2 & q-2\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \boxed{-1}\\ \boxed{-1}\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & p+1 & p+1\\ 0 & p+1 & 2(p+1)\\ 0 & q-2 & q-2\end{bmatrix}\begin{array}{l}p\neq-1\\ \boxed{1/(p+1)}\\ \boxed{1/(p+1)}\\ \\ \end{array}\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & q-2 & q-2\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \boxed{-1}\ \boxed{2-q}\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Fall 1. $p\neq-1$. $rang\,\mathbf{M}=3$

$$\mathbf{M}\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Fall 2. $p=-1$.

$$\mathbf{M}\sim\begin{bmatrix}1 & p+2 & p+2\\ 0 & p+1 & p+1\\ 0 & p+1 & 2(p+1)\\ 0 & q-2 & q-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & q-2 & q-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & q-2 & q-2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Fall 2a. $p=-1,\ q\neq2$. $rang\,\mathbf{M}=2$ **Fall 2b.** $p=-1,\ q=2$. $rang\,\mathbf{M}=1$

SVAR: $rang\,\mathbf{M}=\begin{cases}3 & \text{för} \quad p\neq-1\\ 2 & \text{för} \quad p=-1\wedge q\neq2\\ 1 & \text{för} \quad p=-1\wedge q=2\end{cases}$

7. Beräkna avståndet från punkten (1; 3; −5) till

a) planet $z = 2 - x + 2y$. (2p)

Lösning:

$$z = 2 - x + 2y = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 2 = 0$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|x_1 - 2y_1 + z_1 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 6 - 5 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|-12|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} \text{ le}$$

b) linjen $\frac{x-1}{2} = y;\ z = 1..$ (3p)

Lösning:

$$\frac{x-1}{2} = y = t \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \cdot 2 \\ y = 0 + t \cdot 1 \\ z = 1 + t \cdot 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{r}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ och det följer att}$$

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Avståndsformeln för räta linjen ger slutligen att

$$d = \frac{|\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_o)|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\left| 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right|}{\left| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|} = \frac{6\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{30}}{5} \text{ le}$$

8. I ett ONH-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (3; 1; 1), C = (3; 2; 2),

D = ($a+1$; a ; 5) och E = (1;6; 1) givna.

Π är det plan som går genom punkterna A, B och C. L är den linje som går genom punkterna D och E.

a) Beräkna $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AD}$. (2p)

Lösning:

a) $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\left(\boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix}2 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\boldsymbol{e}_x(1-0)-\boldsymbol{e}_y(2-0)+\boldsymbol{e}_z\,(4-2)=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$$

SVAR: $$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}a\\a\\4\end{bmatrix}=1\cdot a+(-2)\cdot a+2\cdot 4=8-a$$

b) Bestäm konstanten a så att volymen för tetraedern ABCD blir $\frac{1}{3}$ *ve*. (2p)

Lösning:

$$V_{ABCD}=\pm\tfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\bullet\overrightarrow{AD}=\pm\tfrac{1}{6}(8-a)=\tfrac{1}{3}\Rightarrow 8-a=\pm 2\Rightarrow a=8\mp 2$$

SVAR: $(a=6)\vee(a=10)$

c) Avgör för vilka värden på a som $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ bildar ett högersystem. (1p)

SVAR: $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AD}>0\Leftrightarrow 8-a>0\Leftrightarrow a<8$

d) Finns något värde på konstanten a för vilket linjen L inte skär planet Π?
Bestäm i så fall detta värde på a. (3p)

Lösning:

En linje L som går genom D och E har ekvationen

$$\text{L: } \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{ED} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

L skär ej planet $\Pi \Rightarrow$ L är parallell med $\Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{ED} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot a + (-2) \cdot (a-6) + 2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 20 - a = 0 \Leftrightarrow a = 20$$

Återstår att kontrollera att linjen L ej ligger i planet.

D ligger i Π $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow a = 8 \neq 20$

SVAR: $a = 20$

e) Finns det något värde på talet a sådant att linjen L är vinkelrät mot planet Π?
Bestäm i så fall detta värde på a. (3p)

Lösning:

L är vinkelrät mot planet Π $\Leftrightarrow$ L:s riktningsvektor är parallell med Π:s normalvektor $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} = t\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t & \Rightarrow & a = 2 \\ a - 6 = -2t & \Rightarrow & -4 = -4 \\ 4 = 2t & \Rightarrow & t = 2 \end{cases}$$

SVAR: $a = 2$

Alt.1. $\overrightarrow{AB}$ är vinkelrät mot L $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{ED} = 0 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$

Alt.2. $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \times \overrightarrow{ED} = \mathbf{0}$ osv.

Alt.3. Definitionen av skalärprodukt ger att $\pm\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \bullet \overrightarrow{ED} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \left|\overrightarrow{ED}\right| \cos\theta$
dvs att

$$\pm(20 - a) = \left|(1, -2,\ 2)\right| \left|(a, a-6,\ 4)\right| \cos 0^o \Leftrightarrow \pm(20 - a) = 3\sqrt{2a^2 - 12a + 52}$$

Kvadrering ger att $17a^2 - 78a + 68 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 2$