Lösningar till tentamen i Matematik, del B för BI1, och del C, för KI1 20130828.

3. En andragradskurva $y = ax^2 + bx + c$ skall anpassas till
punkterna $(-1;\ 1)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ -1)$ och $(2;\ 0)$ med minsta kvadratmetoden.

a) Bestäm det utjämnade ekvationssystem ESU som ger den bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening. (3p)

b) Lös ESU med Cramers regel. (3p)

Lösning:

a) Insättning av punkterna i kurvans ekvation ger matrisekv: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls av (**ESU**) $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{ESU})\ \ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a + 8b + 6c &= 0 \\ 8a + 6b + 2c &= 2 \\ 6a + 2b + 4c &= 0 \end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ \det(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 360 - 160 - 120 = 80$$

$$\det(A^T A)_1 = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (\text{ utveckling} k_1) = (-1)^{2+1} \cdot 2\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -40,$$

$$\det(A^T A)_2 = \begin{vmatrix} 18 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (\text{ utveckling} k_2) = (-1)^{2+2} \cdot 2\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 72$$

$$\det(A^T A)_3 = \begin{vmatrix} 18 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (\text{ utveckling} k_3) = (-1)^{2+3} \cdot 2\begin{vmatrix} 18 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 24$$

$$a=\frac{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_1}{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}=\frac{-40}{80}=-\frac{1}{2},b=\frac{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_2}{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}=\frac{72}{80}=\frac{9}{10},c=\frac{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})_3}{\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})}=\frac{24}{80}=\frac{3}{10}$$

SVAR: $y=ax^2+bx+c=-\frac{5}{10}x^2+\frac{9}{10}x+\frac{3}{10}$

4. Bestäm, för varje värde på parametern p, rangen av matrisen

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ p & 1 & 1 & 1\\ 5 & 5-p & 8-3p & 5\end{bmatrix}$$ (6p)

Lösning:

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ p & 1 & 1 & 1\\ 5 & 5-p & 8-3p & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3 & 1\\ p & 1 & 1 & 1\\ 5 & 5-p & 8-3p & 5\end{bmatrix}\boxed{-3}\ \boxed{-p}\ \boxed{-5}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p\\ 0 & -p & 3-3p & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}p\neq 1\\ \boxed{-1}\\ \boxed{\frac{1}{1-p}}\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -p & 3-3p & 0\end{bmatrix}\boxed{-1}\ \boxed{p}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3-3p & 2p\end{bmatrix}\boxed{3p\text{-}3}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 3-p\end{bmatrix}\begin{matrix}p\neq 3\\ \\ \\ \boxed{\frac{1}{3-p}}\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Fall 1. $p\neq 1\wedge p\neq 3\Rightarrow\mathbf{M}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rang\mathbf{M}=4\quad p=1\Rightarrow\mathbf{M}$

Fall1 2. $p=1\Rightarrow\mathbf{M}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 1-p & 1-p & 1-p\\ 0 & -p & 3-3p & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang\mathbf{M} = 3$$

Fall1 3. $p = 3 \Rightarrow \mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang\mathbf{M} = 3$

SVAR: $rang\mathbf{M} = \begin{cases} 4 \quad \text{då} \quad (p \neq 1) \wedge (p \neq 3) \\ 3 \quad \text{då} \quad (p = 1) \vee (p = 3) \end{cases}$

5. Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{X} + \mathbf{B}$, där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & q \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$,

för alla värden på parametern q. (6p)

Lösning:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{X} + \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{XA} - \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{XA} - \mathbf{XE} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{B}$$

Antag att $typ\mathbf{X} = m \times n$. $typ[\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E})] = typ\mathbf{B} \Rightarrow (m \times \cancel{n})(\cancel{2} \times 2) = (1 \times 2) \Rightarrow typ\mathbf{X} = 1 \times 2$

Om $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$ existerar, kan vi lösa ut $\mathbf{X}$ genom att multiplicera från höger med $(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}$.

$$\mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & q-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & q-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (q-1) - 2 \cdot 3 = q - 7$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \text{ existerar } \Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \neq 0 \Leftrightarrow q - 7 \neq 0 \Leftrightarrow q \neq 7$$

Fall 1. $q \neq 7$

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{XE} = \mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = \tfrac{1}{q-7}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q-1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{q-7}\begin{bmatrix} q-7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fall 2. $q = 7$

$typ\mathbf{X} = 1 \times 2 \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ vilket ger att

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + 3b & 2a + 6b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 & \boxed{-2} \\ 2a + 6b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 3b \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 3t \\ b = t \end{cases}$$

varav $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3t & t \end{bmatrix}$

SVAR: $\mathbf{X} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{då } q \neq 7 \\ \begin{bmatrix} 1 - 3t & t \end{bmatrix} & \text{då } q = 7 \end{cases}$

6. Man vet att $|\boldsymbol{u}| = 2$, $|\boldsymbol{v}| = 3$ och att $|2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| = \sqrt{13}$. Beräkna med vektoralgebra

a) $|3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}|$ **b)** $|3\boldsymbol{u} \times 2\boldsymbol{v}|$ (4p+2p)

Lösning:

a) $\sqrt{13} = |2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}| \Rightarrow 13 = |2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2 = (2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \bullet (2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) =$

$= (2\boldsymbol{u}) \bullet (2\boldsymbol{u}) - (2\boldsymbol{u}) \bullet \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \bullet (2\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} =$

$= 4|\boldsymbol{u}|^2 - 4|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta + |\boldsymbol{v}|^2 = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta + 3^2 = 25 - 24\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{25-13}{24} = \frac{1}{2}$

$|3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}|^2 = (3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) \bullet (3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) = 9|\boldsymbol{u}|^2 - 12|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta + 4|\boldsymbol{v}|^2 =$

$= 9 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 = 4^2 \Rightarrow |3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}| = 4$

b) $|3\boldsymbol{u} \times 2\boldsymbol{v}| = |(3 \cdot 2)\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |6||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = 6|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\theta = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

7. I ett ON-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 1) och C = (k; 2; 3) givna.
Låt L vara den linje som går genom punkterna A och B.

a) Beräkna $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (2p)

b) Bestäm konstanten k så att avståndet mellan L och punkten C blir 6 le. (4p)

Lösning:

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k-1 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k-1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= \boldsymbol{e}_x (2-0) - \boldsymbol{e}_y (2-0) + \boldsymbol{e}_z (2-(k-1)) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-k \end{bmatrix}$$

b) $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} k-1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3-k \end{bmatrix}$ varav

$d = \dfrac{|\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)|}{|\boldsymbol{v}|} \Leftrightarrow 6 = \dfrac{\sqrt{(k-3)^2 + 8}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 6\sqrt{2} = \sqrt{(k-3)^2 + 8}$. Kvadrering ger att

$36 \cdot 2 = (k-3)^2 + 8 \Leftrightarrow (k-3)^2 = 64 \Leftrightarrow k - 3 = \pm 8 \Leftrightarrow (k = 11) \vee (k = -5)$

Prövning: $HL = \sqrt{(k-3)^2 + 8} = \sqrt{(3 \pm 8 - 3)^2 + 8} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2} = VL$

8. Linjerna $L_1 : x-1=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{3}$, $L_2 : x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{2}$ och planet $\Pi : x+y-2z-1=0$ är givna i ett ONH-system. Låt

S_1 vara skärningspunkten för L_1 och Π,
S_2 vara skärningspunkten för L_2 och Π,
S_3 vara skärningspunkten för L_1 och L_2 och
S_4 ligga i Π och ha x-koordinaten 1.

För vilka värden på z-koordinaten för S_4 bildar $\overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1S_3}, \overrightarrow{S_1S_4}$ ett högersystem? (10p)

Lösning:

$$L_1 : x-1=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{3}=t \Leftrightarrow L_1 : \begin{cases} x=1+t\cdot 1 \\ y=2+t\cdot 3 \\ z=3+t\cdot 3 \end{cases}$$

$$L_2 : x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{2}=s \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+s\cdot 1 \\ y=3+s\cdot 2 \\ z=4+s\cdot 2 \end{cases}$$

Kombination av parameterformen för ekvationerna till L_1 och L_2 ger

$$\text{(ES)} \begin{cases} (x=) & 1+t & = & 2+s & \Leftrightarrow & t-s=1 \\ (y=) & 2+3t & = & 3+2s & \Leftrightarrow & 3t-2s=1 \\ (z=) & 3+3t & = & 4+2s & \Leftrightarrow & 3t-2s=1 \end{cases} \text{ med totalmatrisen}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \boxed{-3} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \boxed{1}\ \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} t=-1 \\ s=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Koordinaterna för skärningspunkten S_3 erhålls genom att sätta in $t=-1$ respektive $s=-2$ i ekvationerna för L_1 respektive L_2.

$$L_1 : \begin{cases} x=1+(-1)\cdot 1=0 \\ y=2+(-1)\cdot 3=-1, \\ z=3+(-1)\cdot 3=0 \end{cases} L_2 : \begin{cases} x=2+(-2)\cdot 1=0 \\ y=3+(-2)\cdot 2=-1 \\ z=4+(-2)\cdot 2=0 \end{cases} \text{ varav } S_3=(0;-1;\ 0)$$

Insättning av linjernas ekvationer på parameterform i ekvationen för planet ger

$$0=x+y-2z-1=1+t+2+3t-6-6t-1=-2t-4 \Rightarrow t=-2$$

$$0=x+y-2z-1=2+s+3+2s-8-4s-1=-s-4 \Rightarrow s=-4$$

Skärningspunkterna är: $S_1=(-1;-4;-3)$ och $S_2=(-2;-5;-4)$

$$S_4 = (1; y; z) = (1; 2z; z) \quad (x + y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow 1 + y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow y = 2z)$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{S_1S_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2z \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2z+4 \\ z+3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3}\right) \bullet \overrightarrow{S_1S_4} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 \\ 2z+4 \\ z+3 \end{bmatrix} = 2(0 + 2z + 4 - z - 3) = 2(z+1) > 0 \Rightarrow z > -1$$