Problemlösningar till tentamen i LMA033 0399 Matematik, del B, för BI1 och LMA515 0304 Matematik, del C, för KI1 torsdagen den 14 mars 2013.

3.a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+\ \ y=1 \\ 2x+\ \ y=3 \\ x+2y=0 \\ x-\ \ y=1 \end{cases}$

approximativt med minsta kvadratmetoden. (4p)

b) Beräkna felvektor och medelfel för lösningen i **3a**. (2p)

Lösning:

a) (**ES**) $\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x+y &= 3 \\ x+2y &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}$ eller på matrisform $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls ur

$$(\mathbf{ESU})\ \ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{t}}\mathbf{b}) = \tfrac{1}{33}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{33}\begin{bmatrix} 44 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

SVAR: $\begin{cases} \hat{x} = \frac{4}{3} \\ \hat{y} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

b) Beräkna felvektor och medelfel för lösningen i **3a**. (2p)

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{9}{3} \\ 0 \\ \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \tfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet $\eta = \frac{|\mathbf{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2+1^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$

4.a) Lös (ES) $\begin{cases} 2x & + & 2y & - & az & = & a \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ ax & + & (a+1)y & + & (1-a)z & = & a \end{cases}$

för alla värden på parametern a för vilka lösningar existerar,
genom att överföra ekvationssystemets totalmatris till reducerad form. (6p)

Lösning:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -a & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ a & a+1 & 1-a & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -a & a \\ a & a+1 & 1-a & a \end{bmatrix} \boxed{-2}\ \boxed{-a} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a & a-2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & a-2 \end{bmatrix} \boxed{-1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & a-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a \neq 2 \\ \\ \boxed{\tfrac{1}{2-a}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boxed{-1}\ \boxed{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fall 1: $a \neq 2$
(Precis en lösning.)

$$\begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{cases}$$

Fall 2: $a = 2$
Oändligt många lösningar

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x-2z & = & 1 \\ y+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{cases}$$

b) Bestäm rangen för ekvationssystemets totalmatris. (1p)

Lösning:

Fall 1: $a \neq 2$ rang$\mathbf{M}$ = 3
Precis en lösning.

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fall 2: $a = 2$ rang$\mathbf{M}$ = rang$\mathbf{A}$ = 2 < n = 3
Oändligt många lösningar

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Lös ES med Cramers regel för de värden på parametern *a* för vilka detta är möjligt. (3p)

Lösning:

a) $\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & a+1 & 1-a \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a+1 & 1-a \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot(1-a+a+1) - 2\cdot(1-a+a) + (-a)\cdot(a+1-a) = 4-2-a = 2-a$

$\det\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} a & 2 & -a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & a+1 & 1-a \end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a+1 & 1-a \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} =$

$= a\cdot(1-a+a+1) - 2\cdot(1-a+a) + (-a)\cdot(a+1-a) = 2a-2-a = a-2$

$\det\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 \\ a & a & 1-a \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1-a \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot(1-a+a) - a\cdot(1-a+a) + (-a)\cdot(a-a) = 2-a$

$\det\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} + a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot(a-a-1) - 2\cdot(a-a) + a\cdot(a+1-a) = -2-0+a = a-2$

SVAR: $\begin{cases} x = \dfrac{\det\mathbf{A}_1}{\det\mathbf{A}} = \dfrac{a-2}{2-a} = -1 \\[2ex] y = \dfrac{\det\mathbf{A}_2}{\det\mathbf{A}} = \dfrac{2-a}{2-a} = 1 \qquad \text{för } a \neq 2 \\[2ex] z = \dfrac{\det\mathbf{A}_3}{\det\mathbf{A}} = \dfrac{a-2}{2-a} = -1 \end{cases}$

5. Låt $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&3&2\\3&2&2\end{bmatrix}$ och $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

a) Beräkna $\mathbf{B}^{-1}$ (2p)

Lösning:

$$\left[\mathbf{B}\middle|\mathbf{E}\right]=\left[\begin{array}{rrrrrr}1&1&1&1&0&0\\-1&3&2&0&1&0\\3&2&2&0&0&1\end{array}\right]\boxed{1}\ \boxed{-3}\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1&1&1&1&0&0\\0&4&3&1&1&0\\0&-1&-1&-3&0&1\end{array}\right]\boxed{-1}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&3&0&-1\\0&4&3&1&1&0\end{array}\right]\boxed{-1}\ \boxed{-4}\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1&0&0&-2&0&1\\0&1&1&3&0&-1\\0&0&-1&-11&1&4\end{array}\right]\boxed{1}\ \boxed{-1}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{rrrrrr}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-8&1&3\\0&0&1&11&-1&-4\end{array}\right]=\left[\mathbf{E}\middle|\mathbf{B}^{-1}\right]\quad \textbf{SVAR: } \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\-8&1&3\\11&-1&-4\end{bmatrix}$$

b) Beräkna $\mathbf{CB}^{-1}$ (1p)

Lösning:

$$typ(\mathbf{CB}^{-1})=(2\times 3)(3\times 3)=2\times 3\,\mathbf{;}\,\mathbf{CB}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1\\-8&1&3\\11&-1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

c) Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB}=\mathbf{C}$ då $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&4\end{bmatrix}$ (2p)

Lösning:

Om $\mathbf{A}^{-1}$ och $\mathbf{B}^{-1}$ existerar, kan vi lösa ut $\mathbf{X}$ genom att multiplicera från vänster med $\mathbf{A}^{-1}$ och från höger med $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&4\end{vmatrix}=1\cdot 4-(-1)\cdot 2=6\neq 0\Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\text{existerar. }\mathbf{A}^{-1}=\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-2\\1&1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AXB}=\mathbf{C}\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AXBB}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\Rightarrow\mathbf{EXE}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$$

$$\because\ \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}=\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-2\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

d) Lös matrisekvationen $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$ då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3p)

$typ\mathbf{A} = 2\times 1 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existerar ej! Gör en typinspektion. Antag att $typ\mathbf{X} = m\times n$.

$typ\mathbf{AXB} = (2\times 1)(m\times n)(3\times 3) = typ\mathbf{C} = 2\times 3 \Rightarrow typ\mathbf{X} = 1\times 3$

Ansätt $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$. Vi får att

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix} = \mathbf{CB}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

SVAR: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Antag att $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ bildar en ONH-bas. Beräkna

a) $(\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z)\times(3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_z)$. (2p)

Lösning:

$$(\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_z)\times(3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_z) = 3\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z + 6\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x + 8\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z =$$

$$= 3\boldsymbol{0} + 4\boldsymbol{e}_y - 6\boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{0} = -2\boldsymbol{e}_y$$

b) $\left|\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right|$. (2p)

Lösning:

$$\left|\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right|^2 = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)\bullet(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z) =$$

$$= \boldsymbol{e}_x\bullet\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_x\bullet\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_x\bullet\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_y\bullet\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\bullet\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_y\bullet\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_z\bullet\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z\bullet\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\bullet\boldsymbol{e}_z =$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3 \Rightarrow \left|\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right| = \sqrt{3}$$

7. I ett ONH-system system är planet $\Pi: 2x - y - 2z - 3 = 0$ och

samt linjen L: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = z - 3$ givna.

a) Ange en punkt som ligger i planet Π. (0,5p)

Lösning:

Välj t. ex. $x = z = 0$ vilket insatt i planets ekvation ger att $y = -3$ **SVAR:** $(0;-3;\ 0)$

b) Visa att punkten Q = (5; 0; 5) ligger på linjen L och beräkna avståndet från planet Π till punkten Q. (2,5p)

Lösning:

$$\mathrm{L}: \frac{x-1}{2} = y+2 = z-3 = t \Leftrightarrow \mathrm{L}: \begin{cases} x = \ \ 1+t\cdot 2 \\ y = -2+t\cdot 1 \\ z = \ \ 3+t\cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \ \ 1+t\cdot 2 = 5 \Rightarrow t = 2 \\ y = -2+t\cdot 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \\ z = \ \ 3+t\cdot 1 = 5 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

Insättning av A:s koordinater i avståndsformeln för Π ger

$$d = \pm\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \pm\frac{2x_1-y_1-2z_1-3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \pm\frac{2\cdot 5-0-2\cdot 5-3}{\sqrt{9}} = -\frac{-3}{3} = 1\text{ le}$$

c) I vilken punkt skär linjen *L* planet Π? (2p)

Lösning:

Insättning av L:s ekv. i Π:s ekv. ger

$$\Pi: 2x-y-2z-3=0 \Leftrightarrow 2(1+2t)-(-2+t)-2(3+t)-3=0 \Leftrightarrow t-5=0 \Leftrightarrow t=5$$

SVAR: Skärningspunkten $S = (1+5\cdot 2; -2+5\cdot 1; 3+5\cdot 1) = (11;3;8)$

8. I ett ONH-system är punkterna A = (1; 0; 1), B = (2; 1; 3), C = (3; 0; 1) givna. Π_1 är planet $kx+2y+6z+4=0$, där *k* är en konstant, och Π_2 är det plan som går genom punkterna A, B och C.

a) Beräkna arean av triangeln ABC. (2p)

Lösning:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}; \ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 0\end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{vmatrix} = 0\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z = 2\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$$

SVAR: $T_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|2\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$ ae

b) Beräkna den minsta vinkel som planet Π_1 kan bilda med planet Π_2. (5p)

Lösning:

Planet $\Pi_1 : kx + 2y + 6z + 4 = 0$ har normalvektorn $\boldsymbol{n}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Normalvektorn för planet Π_2 är parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Välj t ex $\boldsymbol{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vinkeln mellan och Π_1 och Π_2 är

$$\theta = \arccos \frac{\pm \boldsymbol{n}_1 \bullet \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \arccos \frac{\pm \begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right| \left|\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right|} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 40}}$$

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+40}}$ är maximal då nämnaren är så liten som möjligt, dvs för $k = 0$.

Det gäller alltså att

$$\max(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{0^2+40}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 2}} = \frac{2}{2 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Eftersom $\cos\theta$ är avtagande för $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ följer att

$$\cos\theta_{\min} = \max(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

SVAR: $\theta_{\min} = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{10}$